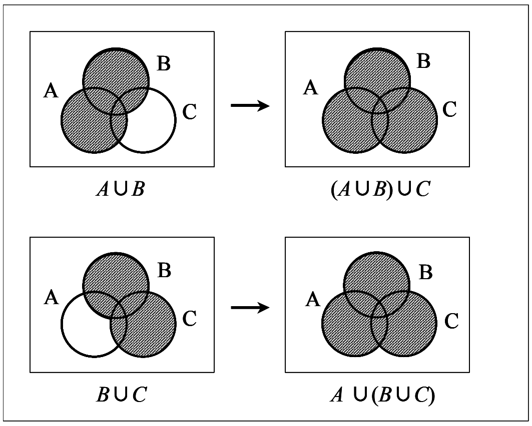
I. 確率(Probability)

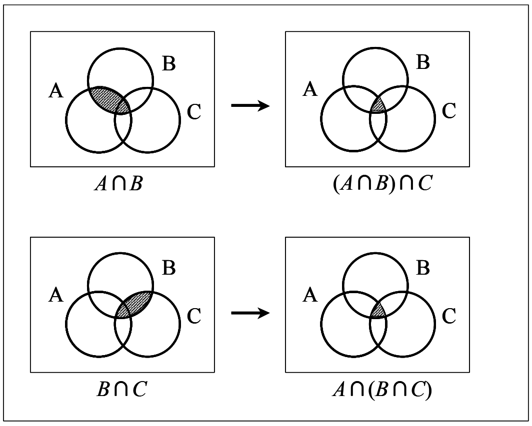
問 1.1　(1) $A = \{x \mid x$ は奇数の整数，$2 \leqq x \leqq 8\}$

(2) $A = \{3,5,7\}$

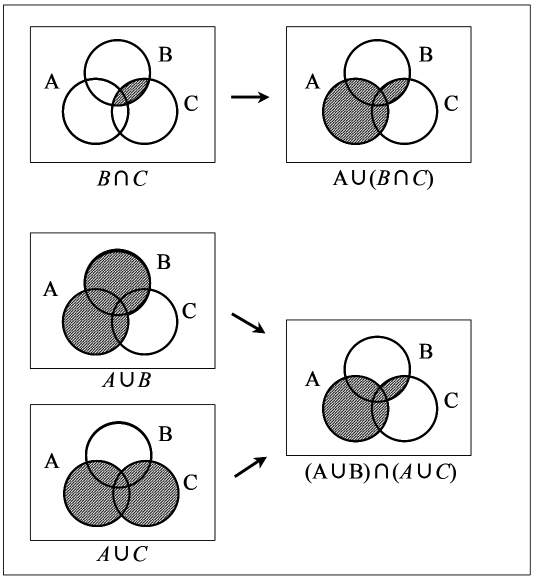
問 1.2　(1)



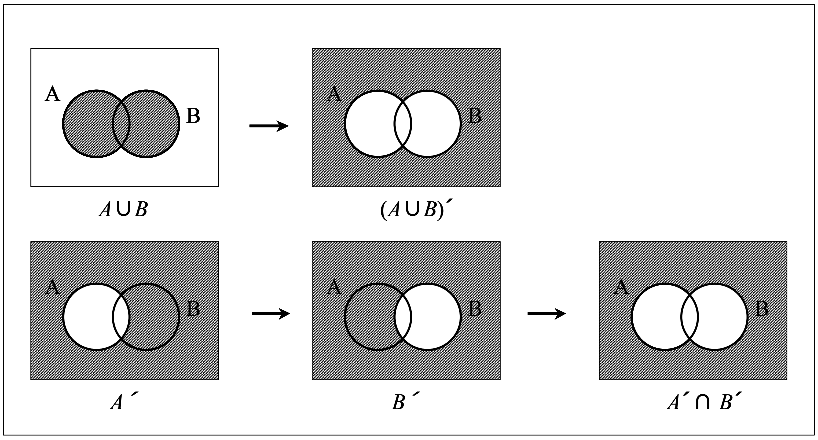
(2)



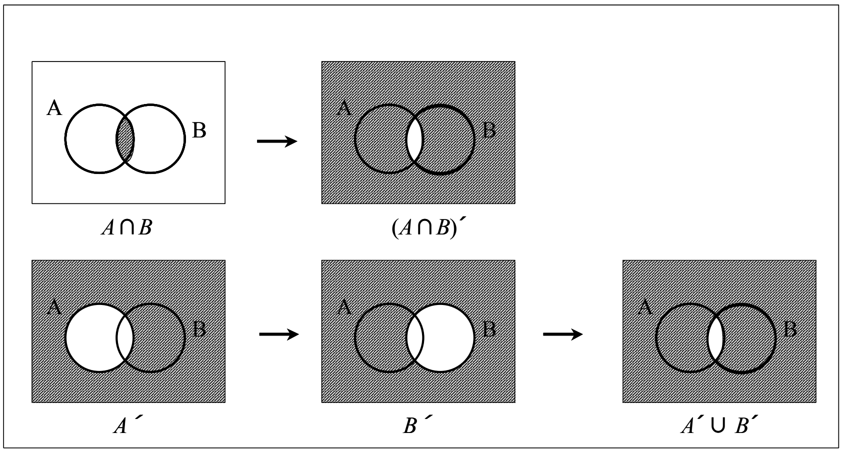
(3)



(4)



(5)



問 1.3　$A \times B = \{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3)\}$

$A \times B \times C = \{(0,2,0),(0,3,0),(1,2,0),(1,3,0),(0,2,1),(0,3,1),(1,2,1),(1,3,1)\}$

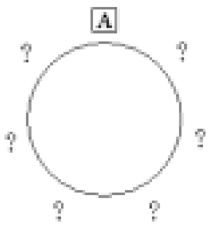
問 1.4　(1) $(4-1) \times 4 \times 4 = 48$

(2) $(4-1)\cdot(4-1)\cdot(4-2) = 18$

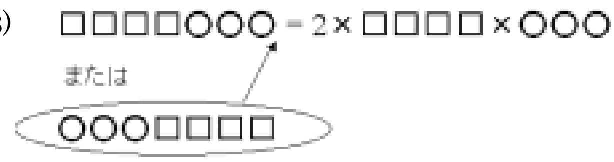
問 1.5　男性を□，各男性を $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ ，女性を○，各女性を e f g 　と表す.

(1) ${}_7P_7 = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5040$

(2) ${}_6P_6 = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$

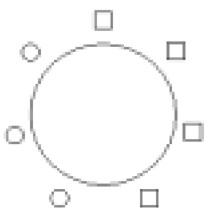


(3)



$= 2({}_4P_4 \times {}_3P_3) = 2\cdot(24 \times 6) = 288$

(4)



(c)の一方のみ.

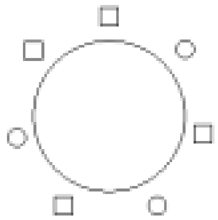
${}_4P_4 \times {}_3P_3 = 24 \times 6 = 144$

(5) 男，女がそれぞれ指定席の場合には，男，女の配置には無関係

□○□○□○□ = □□□□ × ○○○

$= {}_4P_4 \times {}_3P_3 = 24 \times 6 = 144$

(6)



= □○□○□○□

= □□□□×○○○ $= {}_4P_4 \times {}_3P_3 = 24 \times 6 = 144$

(7) □□○□□○○ = □□□□ × ○○○

または

○□□○○□□

または

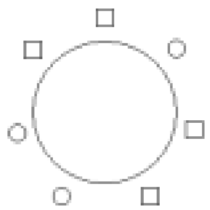
□□○○□□○

または

○○□□○□□

$= 4({}_4P_4 \times {}_3P_3) = 4 \times 144 = 576$

(8)



□□○□□○○

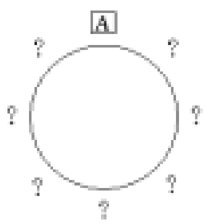
= (□□□□○○○)

$= {}_4P_4 \times {}_3P_3 = 144$

問 1.6　男性を□，各男性を $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ ，女性を○，各女性をⓔ ⓕ ⓖ ⓗ と表す.

(1) ${}_8P_8 = 40320$

(2) ${}_7P_7 = 5040$

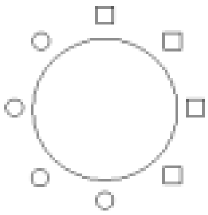


(3) □□□□○○○○ または ○○○○□□□□

$= 2 \times$ □□□□ $\times$ ○○○○

$= 2 \cdot {}_4P_4 \times {}_4P_4 = 2 \cdot 24 \cdot 24 = 1152$

(4)



= □□□□○○○○

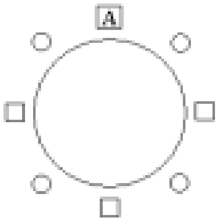
$= {}_4P_4 \times {}_4P_4 = 576$

(5) □○□○□○□○ + ○□○□○□○□

$= 2 \times$ □□□□ $\times$ ○○○○

$= 2 \cdot {}_4P_4 \times {}_4P_4 = 2 \cdot 24 \cdot 24 = 1152$

(6)



= ○□○□○□○ = ○○○○×□□□

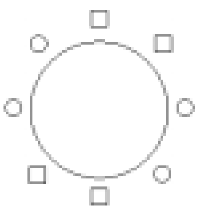
$= {}_4P_4 \times {}_3P_3 = 144$

(7) □□○○□□○○ + ○○□□○○□□

$= 2 \times$ □□○○□□○○ $= 2 \times$ □□□□ $\times$ ○○○○

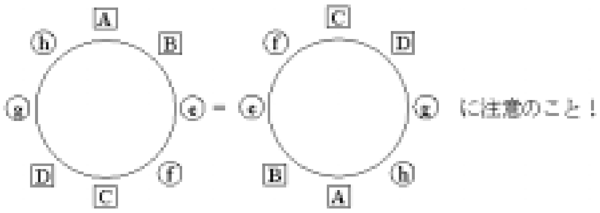
$= 2 \cdot {}_4P_4 \times {}_4P_4 = 2 \cdot 24 \cdot 24 = 1152$

(8)



= □□□□×○○○○÷2

$= {}_4P_4 \times {}_4P_4 / 2 = 288$



例のように，4!×4!の中には並びとしては，全く同じものが 2 つずつ存在する．

問 1.7　$_{10}C_2 \cdot {}_8C_3 = \dfrac{10 \cdot 9}{2!} \cdot \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 45 \cdot 56 = 2520$

問 1.8

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$$

問 2.1　(1) $A \cup B'$= {2,4,6}∪{1,2,4,5} = {1,2,4,5,6}

(2) $A' \cap B'$= {1,3,5}∩{1,2,4,5} = {1,5}

(3) $A-B$= {2,4,6}－{3,6} = {2,4}

問 2.2　(1) $P(1)$ = 4/52 = 1/13

(2) $P(H)$ = 13/52 = 1/4

(3) $P(H')$ = 1－$P(H)$ = 1－1/4 = 3/4

(4) $P(1 \cap H)$ = 4/52×13/52 = 1/52

(5) $P(1 \cup H)$ = 4/52 + 13/52－1/52 = 4/13

(6) $P(1)$+$P(H)$－$P(1 \cap H)$ = 1/13 + 1/4－1/52 = 4/13

(7) $P(1 \cup (1 \cap H))$ = $P(1)$ = 1/13

(8) $P(1 \cap (1 \cap H))$ = $(1 \cap H)$ = 1/52

(9) $P(2 \cup (1 \cap H))$ = $P(2)$+ $(1 \cap H)$ = 1/13 + 1/52 = 5/52

(10) $P(2 \cap (1 \cap H))$ = 0

問 2.3　P(高校生 | 男子) = 男子高校生/(男子大学生+男子高校生) = 10/(10+30) = 1/4

P(高校生 | 女子) = 女子高校生/(女子大学生+女子高校生) = 40/(20+40) = 2/3

P(大学生 | 女子) = 女子大学生/(女子大学生+女子高校生) = 20/(20+40) = 1/3

P(男子 | 大学生) = 男子大学生/(男子大学生+女子大学生) = 30/(30+20) = 3/5

P(女子 | 大学生) = 女子大学生/(男子大学生+女子大学生) = 20/(30+20) = 2/5

P(男子 | 高校生) = 男子高校生/(男子高校生+女子高校生) = 10/(10+40) = 1/5

P(女子 | 高校生) = 女子高校生/(男子高校生+女子高校生) = 40/(10+40) = 4/5

問 2.4　(1) $P(W_1 \cap W_2 \cap B_3) = P(W_1)P(W_2 \mid W_1)P(B_3 \mid W_1 \cap W_2) = P(W)P(W)P(B)$

$$= \frac{4}{4+6} \cdot \frac{4}{4+6} \cdot \frac{6}{4+6} = 12/125$$

(2) $P(W_1 \cap W_2 \cap B_3) = P(W_1)P(W_2 \mid W_1)P(B_3 \mid W_1 \cap W_2)$

$$= \frac{4}{4+6} \cdot \frac{3}{3+6} \cdot \frac{6}{2+6} = 1/10$$

問 2.5　$P(S) = P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap (B_1 \cup B_3)) + P(A_3 \cap B_2)$

$= P(A_1)P(B_2 \mid A_1) + P(A_2)P(B_1 \cup B_3 \mid A_2) + P(A_3)P(B_2 \mid A_3)$

$= (1/6)(1/5) + (1/6)(2/5) + (1/6)(1/5)$

$= 2/15$

問 2.6

結合確率，あるいは同時生起確率，$p(x, \omega)$　←求解の第一ステップ

カテゴリー，ω ／ 観測，あるいは特徴量，x	日本人，ω_1	アメリカ人，ω_2	xが生起する確率，$p(x)$
A型	$p(x_1, \omega_1) = 3/10 \cdot 3/10 = 9/100$	$p(x_1, \omega_2) = 2/10 \cdot 7/10 = 14/100$	$p(x_1) = 9/100 + 14/100 = 23/100$
B型	$p(x_2, \omega_1) = 4/10 \cdot 3/10 = 12/100$	$p(x_2, \omega_2) = 1/10 \cdot 7/10 = 7/100$	$p(x_2) = 12/100 + 7/100 = 19/100$
O型	$p(x_3, \omega_1) = 3/10 \cdot 3/10 = 9/100$	$p(x_3, \omega_2) = 7/10 \cdot 7/10 = 49/100$	$p(x_3) = 9/100 + 49/100 = 58/100$

事後確率，$p(\omega \mid x)$　←求解の第二ステップ

カテゴリー，ω ／ 観測，あるいは特徴量，x	日本人，ω_1	アメリカ人，ω_2
A型	$p(\omega_1 \mid x_1) = 9/100 \div 23/100 = 9/23$	$p(\omega_2 \mid x_1) = 14/100 \div 23/100 = 14/23$
B型	$p(\omega_1 \mid x_2) = 12/100 \div 19/100 = 12/19$	$p(\omega_2 \mid x_2) = 7/100 \div 19/100 = 7/19$
O型	$p(\omega_1 \mid x_3) = 9/100 \div 58/100 = 9/58$	$p(\omega_2 \mid x_3) = 49/100 \div 58/100 = 49/58$

問 2.7

$$\begin{aligned} P(L\mid 1)+P(H\mid 1)&=1 \\ P(L\mid 1)&=P(H\mid 1) \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} P(L\mid 1)&=1/2 \\ P(H\mid 1)&=1/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(L\mid 2)+P(H\mid 2)&=1 \\ P(L\mid 2)&=2P(H\mid 2) \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} P(L\mid 2)&=2/3 \\ P(H\mid 2)&=1/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(G\mid 1)=P(L\mid 1)P(G\mid \mathrm{L}\cap 1)+P(H\mid 1)P(G\mid \mathrm{H}\cap 1)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3+2} \\ &=\frac{1}{6}+\frac{3}{10}=\frac{14}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(G\mid 2)=P(L\mid 2)P(G\mid \mathrm{L}\cap 2)+P(H\mid 2)P(G\mid \mathrm{H}\cap 2)&=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3+7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{6+4} \\ &=\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$P(1\mid G)=\frac{P(1)P(G\mid 1)}{P(1)P(G\mid 1)+P(2)P(G\mid 2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{30}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{30}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{7}{13}$$

$$P(2\mid G)=1-P(1\mid G)=1-\frac{7}{13}=\frac{6}{13}$$

【文章での説明】

左辺の $P(G\mid 1)$は１つ目の机から Gが取り出される確率．１つ目の机１には引出し H, 引出し Lが付いている．その何れの引出しからも Gが取り出される可能性がある．したがって，引出し Hと引出し Lの両者の確率を加算しなければならない．前者の確率は机１かつ引出し Lから Gが取り出される確率であり，右辺第１項 $P(L\mid 1)P(G\mid L\cap 1)$がそれを表す．これは，机１という条件下で引出し Lが選ばれる確率 $P(L\mid 1)$に，机１かつ引出し Lという条件下で Gが取り出される確率を乗ずることにより求められる．後者の確率は机１かつ引出し Hから Gが取り出される確率であり，右辺第２項 $P(H\mid 1)P(G\mid H\cap 1)$ がそれを表す．

【形式的な式変形での説明】

$P(G)=P(L)P(G\mid L)+P(H)P(G\mid H)$ これは容易に理解できるであろう．この関係式に，"1"という条件を付けよう．この時，$P(G)$は $P(G\mid 1)$になる．$P(G\mid L)$は Lという条件の下で Gが取り出される確率であったが，これにさらに"1"という条件が付くのであるから，$P(G\mid L\cap 1)$になる．したがって $P(G\mid 1)=P(L\mid 1)P(G\mid L\cap 1)+P(H\mid 1)P(G\mid H\cap 1)$ となる．　では，元へ戻ろう．

$$\begin{aligned} P(G\mid 2)=P(L\mid 2)P(G\mid \mathrm{L}\cap 2)+P(H\mid 2)P(G\mid \mathrm{H}\cap 2)&=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3+7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{6+4} \\ &=\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$P(1\mid G)=\frac{P(1)P(G\mid 1)}{P(1)P(G\mid 1)+P(2)P(G\mid 2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{30}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{30}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{7}{13}$$

$$P(2\mid G)=1-P(1\mid G)=1-\frac{7}{13}=\frac{6}{13}$$

問 3.1

$$P(0) = {}_4C_0 / 2^4 = 1/16$$

$$P(1) = {}_4C_1 / 2^4 = 4/16 = 1/4$$

$$P(2) = {}_4C_2 / 2^4 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\frac{1}{2^4} = 3/8$$

$$P(3) = {}_4C_3 / 2^4 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1}\frac{1}{2^4} = 1/4$$

$$P(4) = {}_4C_4 / 2^4 = 1/16$$

問 3.2　(1) $P(0) = P(○\cap○\cap○) = P(○)P(○\,|\,○)P(○\,|\,○\cap○)$

$$= \frac{6}{6+2}\cdot\frac{5}{5+2}\cdot\frac{4}{4+2} = \frac{5}{14}$$

$P(1) = P(○\cap○\cap●)+P(○\cap●\cap○)+P(●\cap○\cap○)$

$= P(○)P(○\,|\,○)P(●\,|\,○\cap○)+ P(○)P(●\,|\,○)P(○\,|\,○\cap●)$

$+ P(●)P(○\,|\,●)P(○\,|\,●\cap○)$

$$= \frac{6}{6+2}\cdot\frac{5}{5+2}\cdot\frac{2}{4+2} + \frac{6}{6+2}\cdot\frac{2}{5+2}\cdot\frac{5}{5+1} + \frac{2}{6+2}\cdot\frac{6}{6+1}\cdot\frac{5}{5+1} = \frac{15}{28}$$

$P(3) = 0$

$P(2) = 1 - 15/28 - 5/14 = 3/28$

(2) $F(X) =$

5/14	$-\infty < X < 1$
25/28	$1 \leqq X < 2$
1	$2 \leqq X < 3$
1	$3 \leqq X < \infty$

問 3.3　(1)　$E(X) = (-1)\cdot(1/4)+(0)\cdot(1/8)+(1)\cdot(5/8) = 3/8$

$E(Y) = 2\cdot(1/2)+3\cdot(1/2) = 5/2$

(2)　$E(2X+1) = 2E(X)+1 = 2\cdot(3/8)+1 = 7/4$

(3)　$E(2X+3Y) = 2E(X)+3E(Y) = 2\cdot(3/8)+3\cdot(5/2) = 33/4$

(4)　$E(X^2) = (-1^2)\cdot(1/4)+(0^2)\cdot(1/8)+(1^2)\cdot(5/8) = 7/8$

$E(Y^2) = (2^2)\cdot(1/2)+(3^2)\cdot(1/2) = 13/2$

$E(X^2+Y^2) = 7/8+13/2 = 59/8$

問 3.4　(1)

$P(x, y)$

y \ x	0	1	10
0	0.89	0	0.008
2	0	0.1	0.002

(2) $E(X) = 0\cdot(0.89+0)+1\cdot(0+0.1)+10\cdot(0.008+0.002) = 0.2$

$E(Y) = 0\cdot(0.89+0+0.008)+2\cdot(0+0.1+0.002) = 0.204$

$\mu_{X+Y} = E(X+Y) = E(X)+E(Y) = 0.2+0.204 = 0.404$

結合確率分布 $P(x, y)$を用いて直接的に $E(X+Y)$を求めることができる．すなわち,

$\mu_{X+Y} = E(X+Y) = (0+0)\cdot0.89+(0+1)\cdot0+(0+10)\cdot0.008+(2+0)\cdot0+(2+1)\cdot0.1+(2+10)\cdot0.002$

$= 0.08+0.3+0.024 = 0.404$

(3) $\mu_{XY} = E(X\cdot Y) = (0\cdot0)\cdot0.89+(0\cdot1)\cdot0+(0\cdot10)\cdot0.008+(2\cdot0)\cdot0+(2\cdot1)\cdot0.1+(2\cdot10)\cdot0.002$

$= 0.24$

問 3.5

(1) $\mu_X = E(X) = 1\cdot(1/6)+2\cdot(1/6)+\cdots\cdot+6\cdot(1/6) = 21/6$

$\mu_Y = E(Y) = 1\cdot(1/6)+2\cdot(1/6)+\cdots\cdot+6\cdot(1/6) = 21/6$

(2) $\mu_{X+Y} = E(X+Y) = E(X)+E(Y) = 21/6+21/6 = 7$

(3) $\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)] = \{(1-7/2)^2+(2-7/2)^2+\cdots\cdot+(6-7/2)^2\}/6 = 35/12$

$\sigma_Y^2 = 35/12$

(4) $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2+\sigma_Y^2 = 35/6$

(5)
$$
\begin{aligned}
\mu_{XY} &= 1\cdot1\cdot(1/36)+1\cdot2\cdot(1/36)+\cdots\cdot+1\cdot6\cdot(1/36)\\
&\quad+2\cdot1\cdot(1/36)+2\cdot2\cdot(1/36)+\cdots\cdot+2\cdot6\cdot(1/36)\\
&\qquad\vdots\\
&\quad+6\cdot1\cdot(1/36)+6\cdot2\cdot(1/36)+\cdots\cdot+6\cdot6\cdot(1/36)\\
&= (1+2+\cdots\cdot+6)(1+2+\cdots\cdot+6)/36\\
&= 49/4
\end{aligned}
$$

(6)
$$
\begin{aligned}
\sigma_{XY}^2 &= (1\cdot1)^2\cdot(1/36)+(1\cdot2)^2\cdot(1/36)+\cdots\cdot+(1\cdot6)^2\cdot(1/36)\\
&\quad+(2\cdot1)^2\cdot(1/36)+(2\cdot2)^2\cdot(1/36)+\cdots\cdot+(2\cdot6)^2\cdot(1/36)\\
&\qquad\vdots\\
&\quad+(6\cdot1)^2\cdot(1/36)+(6\cdot2)^2\cdot(1/36)+\cdots\cdot+(6\cdot6)^2\cdot(1/36)-\mu_{XY}^2\\
&= (1^2+2^2+\cdots\cdot+6^2)(1^2+2^2+\cdots\cdot+6^2)/36-(49/4)^2 \fallingdotseq 80.0
\end{aligned}
$$

問 3.7

$$
F(y) = \begin{cases} 0 & -\infty \leqq y < 0 \\ \int_0^y \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}y & 0 \leqq y \leqq 2 \\ 1 & 2 < y \end{cases}
$$

問 3.8　$\sigma_Y^2 = E[(Y-\mu_Y)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_y)^2 P(y)dy = \int_0^2 (y-1)^2 \frac{1}{2}dy = 2\int_0^1 y'^2 dy' = \left[\frac{y'^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

問 3.9　$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = \frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

問 3.10　$\mu_X = 0 \quad \sigma_X^2 = \frac{a^2}{6}$

$\mu_Y = 0 \quad \sigma_Y^2 = \frac{a^2}{3}$

問 4.1

$$P_X(0) = 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} \qquad P_X(1) = 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4\cdot 2^3}{3^4} = \frac{32}{81}$$

$$P_X(2) = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81} \qquad P_X(3) = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{81}$$

$$P_X(4) = 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81} \qquad \mu_X = 4\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3} \qquad \sigma_X^2 = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

問 4.2

(1) $P_b(X=0) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$

$= {}_{100}C_0\ 0.03^0 (1-0.03)^{100}$

$= 1\cdot 1\cdot (0.97)^{100}$

$= 0.04755$

(2) $\lambda = np = 100\times 0.03 = 3$

$$P_p(X=0) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = 0.04979$$

問 4.3

X	$P(2) = e^{-2}\frac{2^x}{x!}$
0	$e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 0.1353$
1	$e^{-2}\frac{2^1}{1!} = 0.2707$
2	$e^{-2}\frac{2^2}{2!} = 0.2707$
3	$e^{-2}\frac{2^3}{3!} = 0.1804$
4	$e^{-2}\frac{2^4}{4!} = 0.0902$
5	$e^{-2}\frac{2^5}{5!} = 0.0361$
6	$e^{-2}\frac{2^6}{6!} = 0.0120$
⋮	

求める確率 $P(X \geqq 5)$，全事象の確率は１であることを使うと，

$P(X \geqq 5)=1-P(X<5)$

$=1-\{P(4)+P(3)+P(2)+P(1)+P(0)\}$

$=1-\{0.0902+0.1804+0.2707+0.2707+0.1353\}$

$=1-0.9473=0.0527$

ゆえに，１日に５人以上が交通事故で志望する確率は約 0.0527 である．

問 4.4

(1) $P(X \geqq 80) = 1 - F_{60,10^2}(80) = 1 - \Phi\left(\dfrac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{80-60}{10}\right)$

$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275$

(2) $P(X \leqq 40) = F_{60,10^2}(40) = \Phi\left(\dfrac{40-60}{10}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{60-40}{10}\right)$

$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275$

問 4.5

(1) $x_1 = X^2_{0.95} = 18.3$

(2) $x_2 = X^2_{0.05} = 3.94$

(3) $x_3 = X^2_{0.025} = 3.25$

$x_4 = X^2_{0.975} = 20.5$

問 4.6 (1) $T = \dfrac{\dfrac{Y-6}{\sqrt{16}}}{\sqrt{\left\{\left(\dfrac{X_1-3}{\sqrt{9}}\right)^2 + \left(\dfrac{X_2-3}{\sqrt{9}}\right)^2 + \left(\dfrac{X_3-3}{\sqrt{9}}\right)^2 + \left(\dfrac{X_4-3}{\sqrt{9}}\right)^2\right\}/4}}$

(2) $t^4_{0.95} = 2.13$

問 4.7 $F^{3,4}_{0.95} = 6.59$

問 4.8

$$F = \frac{\left\{\dfrac{(X_1-6)^2}{16} + \dfrac{(X_2-6)^2}{16}\right\}/2}{\left\{\dfrac{(Y_1-3)^2}{9} + \dfrac{(Y_2-3)^2}{9} + \dfrac{(Y_2-3)^2}{9}\right\}/3}$$

II. 統計(Statistics)

問 1.1 母集団：6 日間で製造されたすべての製品

標本：60 = 6×10(選ばれた製品)

問 1.22　母集団：200 個のボール

　　　標本：(取り出した)5 個のボール

問 1.3

$$\bar{x} = (1891 + 1892 + 1887 + 1800 + 2000)/5 = 1894$$

$$s^2 = \{(1891 - 1894)^2 + (1892 - 1894)^2 + (1800 - 1894)^2 + (2000 - 1894)^2\}/(5-1)$$

$$= 5033.5$$

問 1.4

$$\bar{x} = (4 \cdot 154.5 + 15 \cdot 164.5 + 20 \cdot 174.5 + 1 \cdot 184.5)/40 = 169.0$$

$$s^2 = \{4(154.5 - 169.0)^2 + 15(164.5 - 169.0)^2 + 20(174.5 - 169.0)^2 + 1(184.5 - 169.0)^2\}/(40-1)$$

$$= 51.026$$

問 2.1

$$\bar{x} = (2 \cdot 18.7 + 4 \cdot 19.0 + 1 \cdot 19.1 + 5 \cdot 19.3)/12 = 19.1$$

$$s^2 = \{2(18.7 - 19.1)^2 + 4(19.0 - 19.1)^2 + 1(19.1 - 19.1)^2 + 5(19.3 - 19.1)^2\}/(12-1)$$

$$= 0.05$$

$$t_{1-(1-0.99)/2}^{12-1} = t_{0.995}^{11} = 3.11$$

$$-3.11 \leqq \frac{(19.1 - \mu)}{\sqrt{0.05/12}} \leqq 3.11$$

$$19.1 - 3.11\sqrt{0.05/12} \leqq \mu \leqq 19.1 + 3.11\sqrt{0.05/12}$$

$$\therefore 18.899 \leqq \mu \leqq 19.301$$

問 2.2

$$-t_{0.975} \leqq \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leqq t_{0.975}$$

$$t_{1-(1-0.95)/2}^{200-1} = t_{0.975}^{199} = 1.96$$

$$-1.96 \leqq \frac{15.51 - \mu}{\sqrt{0.41^2/200}} \leqq 1.96$$

$$15.51 - 0.057 \leqq \mu \leqq 15.51 + 0.057$$

$$15.453 \leqq \mu \leqq 15.567$$

問 3.1

$$n-1=12-1=11$$
$$s^2=0.05$$
$$X^2_{(1-0.99)/2}=X^2_{0.005}=2.60$$
$$X^2_{1-(1-0.99)/2}=X^2_{0.995}=26.8$$
$$2.60 \leqq \frac{11 \cdot 0.05}{\sigma^2} \leqq 26.8$$
$$\frac{11 \cdot 0.05}{26.8} \leqq \sigma^2 \leqq \frac{11 \cdot 0.05}{2.60}$$
$$\therefore 0.021 \leqq \sigma^2 \leqq 0.212$$

$$n-1=200-1=199$$
$$s^2=0.41^2=0.1681$$
$$X^2_{0.005}=151.4$$
$$X^2_{0.995}=254.1$$
$$151.4 \leqq \frac{199 \cdot 0.1681}{\sigma^2} \leqq 254.1$$
$$\therefore 0.1316 \leqq \sigma^2 \leqq 0.2210$$

問 3.1

(1) $H_0 : \overline{X}=200$

$H_1 : \overline{X} \neq 200$

$a=0.05 \quad n=6$

$\overline{X}=196 \quad s^2=22.4$

$$T=\frac{196-200}{\sqrt{22.4/6}}=-2.07$$

$$-t^{6-1}_{1-0.05/2}=-t^{5}_{0.975}=-2.57$$

$-t^{5}_{0.975}<T$ より　仮説H_0を受理する

(2) $H_0 : \overline{X}=200$

$H_1 : \overline{X}<200$

$$-t^{6-1}_{1-0.05}=-t^{5}_{0.95}=-2.02$$

$T<-t^{5}_{0.95}$ より　仮説H_0を棄却する

問 3.2

Class 1	Class 2
$n_1=40$	$n_1=30$
$\overline{X}_1=62.0$	$\overline{X}_2=59.0$
$S_1^2=16.4$	$S_2^2=24.8$

$$S^2 = \frac{39 \cdot 16.4 + 29 \cdot 24.8}{40 + 30 - 2} = 20.0$$

$$T = \frac{62.0 - 59.0}{\sqrt{\left(\frac{1}{40} + \frac{1}{30}\right) 20.0}} = 2.77$$

(1) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$t_{1-0.01/2}^{40+30-2} = t_{0.995}^{68} = 2.65$

$t_{0.995}^{68} < T$ より　仮説H_0を棄却する

(2) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

$t_{1-0.01}^{40+30-2} = t_{0.99}^{68} = 2.38$

$t_{0.99}^{68} < T$ より　仮説H_0を棄却する

問 3.3

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{16.4}{24.8} = 0.66$$

(1) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$F_{1-\alpha/2}^{n_1-1,n_2-1} = F_{1-0.1/2}^{40-1,30-1} = F_{0.95}^{39,29} = 1.81$

$F_{\alpha/2}^{n_1-1,n_2-1} = F_{0.1/2}^{40-1,30-1} = F_{0.05}^{39,29} = 1/F_{0.95}^{29,39} = 1/1.76 = 0.57$

$F_{0.05}^{39,29} < 0.66 < F_{0.95}^{39,29}$ より，H_0を受理する

(2) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

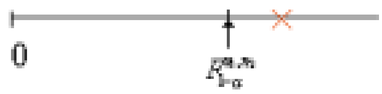
$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

$F_{\alpha}^{n_1-1,n_2-1} = F_{0.05}^{40-1,30-1} = F_{0.05}^{39,29} = 1/F_{0.95}^{29,39} = 0.57$

$F_{0.05}^{39,29} < 0.66$ より，H_0を受理する

問 3.4

Method \ Student	A	B	C	D	Raw means
I	44	76	58	70	62
II	57	85	61	97	75
III	66	84	76	90	79
Column means	55.7	81.7	65	85.7	Grand mean 72

手順	項目	記号	求め方	数値
0	標本を書き出す	$X_{1,1}, X_{1,2}, ----$ $X_{2,1}, X_{2,2}, ----$ $\vdots \quad \ddots X_{i,j}$		44,76,58,70 57,85,61,97 66,84,76,90
1-1	仮説を立てる　仮説	H_0	列間に有意差がない	
1-2	対立仮説	H_1	列間に有意差がある	
2-1	有意水準	α	適切に定める	0.05
2-2	信頼限界	β	$= 1-\alpha$	0.95
2-3			$\alpha/2$ (両側検定の時に使う)	0.025
3-1		n_{row}	標本に従って定められる	3
3-2		n_{column}	標本に従って定められる	4
4-1	母集団1 第1列の列平均	$\bar{X}_{k=1}$	$= \frac{X_{1,1}+X_{2,1}+---+X_{n_{row},1}}{n_{row}}$	55.7
4-2	母集団2 第2列の 列平均	$\bar{X}_{k=2}$	$= \frac{X_{1,2}+X_{2,2}+---+X_{n_{row},2}}{n_{row}}$	81.7
4-3	⋮	⋮	⋮	65.0 85.7
4-4	全平均	$\bar{X}$	$= \frac{\bar{X}_{k=1}+\bar{X}_{k=2}+---\bar{X}_{k=n_{column}}}{n_{column}}$	72
4-5	列間変動	v_b	$= n_{row}\{(\bar{X}_{k=1}-\bar{X})^2+(\bar{X}_{k=2}-\bar{X})^2+---+(\bar{X}_{k=n_{column}}-\bar{X})^2\}$	1788
4-6	全変動	v	$= \{(X_{1,1}-\bar{X})^2+(X_{2,1}-\bar{X})^2+---+(X_{n_{row},1}-\bar{X})^2$ $+(X_{1,2}-\bar{X})^2+(X_{2,2}-\bar{X})^2+---+(X_{n_{row},2}-\bar{X})^2$ $\vdots$ $+(X_{1,n_{column}}-\bar{X})^2+(X_{2,n_{column}}-\bar{X})^2+---+(X_{n_{row},n_{column}}-\bar{X})^2\}$	2660
4-7	列内変動	v_w	$= v - v_b$	872
5-1	列間平均平方	s_b^2	$= v_b / ((n_{column} - 1))$	596
5-2	列内平均平方	s_w^2	$= v_w / (n_{column}(n_{row} - 1))$	109
6-1	検定統計量	F	$= \frac{s_b^2}{s_w^2}$	5.47
6-2	自由度	n_1	$= n_{column} - 1$	3
6-3	自由度	n_2	$= n_{column}(n_{row} - 1)$	8
6-4	自由度が(n_1, n_2)分布関数の値が$1-\alpha$となるF値	$F_{1-\alpha}^{n_1,n_2}$	F分布の数表から求める	4.07
7	棄却域　右裾検定			
8	検定結果		仮説H_0を受理する，棄却する(対立仮説H_1を受理する)	仮説H_0を棄却する

【0.標本を書き出す】

題意より

44	76	58	70
57	85	61	97
66	84	76	90

【1-1，1-2 仮説を立てる】

題意より，　　仮説 H_0:　学生間に有意差がない．

　　　　対立仮説 H_1::　学生間に有意差がある．

【2-1,2-2 有意水準，信頼限界】

題意より，　　有意水準 $\alpha = 0.05$　　信頼限界 $\beta = 1\text{-}0.05 = 0.95$

【3-1,3-2】

題意より，

$n_{\mathrm{row}} = 3$,　　$n_{\mathrm{column}} = 4$

【4-1,4-2,4-3 列平均】

$$\overline{X}_{k=1} = \frac{\overline{X}_{1,1} + \overline{X}_{2,1} + \overline{X}_{3,1}}{n_{row}} = \frac{44+57+66}{3} = 55.7$$

$$\overline{X}_{k=2} = \frac{\overline{X}_{1,2} + \overline{X}_{2,2} + \overline{X}_{3,2}}{n_{row}} = \frac{76+85+84}{3} = 81.7$$

$$\overline{X}_{k=3} = \frac{\overline{X}_{1,3} + \overline{X}_{2,3} + \overline{X}_{3,3}}{n_{row}} = \frac{58+61+76}{3} = 65$$

$$\overline{X}_{k=4} = \frac{\overline{X}_{1,4} + \overline{X}_{2,4} + \overline{X}_{3,4}}{n_{row}} = \frac{70+97+90}{3} = 85.7$$

【4-4 全平均】

$$\overline{X} = \frac{\overline{X}_{k=1} + \overline{X}_{k=2} + \overline{X}_{k=3} + \overline{X}_{k=4}}{n_{column}} = \frac{55.7+81.7+65+85.7}{4} = 72$$

【4-5 列間変動】

$$\begin{aligned} v_b &= n_{row}\{(\overline{X}_{k=1} - \overline{X})^2 + (\overline{X}_{k=2} - \overline{X})^2 + (\overline{X}_{k=3} - \overline{X})^2 + (\overline{X}_{k=4} - \overline{X})^2\} \\ &= 3\{(55.7-72)^2 + (81.7-72)^2 + (65-72)^2 + (85.7-72)^2\} \\ &= 1788 \end{aligned}$$

【4-6 全変動】

$$\begin{aligned} v = \{&(X_{1,1}-\overline{X})^2+(X_{2,1}-\overline{X})^2+(X_{3,1}-\overline{X})^2+\\ &(X_{1,2}-\overline{X})^2+(X_{2,2}-\overline{X})^2+(X_{3,2}-\overline{X})^2+\\ &(X_{1,3}-\overline{X})^2+(X_{2,3}-\overline{X})^2+(X_{3,3}-\overline{X})^2+\\ &(X_{1,4}-\overline{X})^2+(X_{2,4}-\overline{X})^2+(X_{3,4}-\overline{X})^2\}\\ =\{&(44-72)^2+(57-72)^2+(66-72)^2+\\ &(76-72)^2+(85-72)^2+(84-72)^2+\\ &(58-72)^2+(61-72)^2+(76-72)^2+\\ &(70-72)^2+(97-72)^2+(90-72)^2\}\\ =\,&2660 \end{aligned}$$

$$v_w = v - v_b = 2660 - 1788 = 872$$

【5-1 列間平均平方】

$$s_b^2 = v_b/(n_{column}-1) = 1788/(4-1) = 596$$

【5-2 列内平均平方】

$$s_w^2 = v_w/\{n_{column}(n_{row}-1)\} = 872/\{4(3-1)\} = 109$$

【6-1 検定統計量】

$$F = \frac{s_b^2}{s_w^2} = \frac{596}{109} = 5.47$$

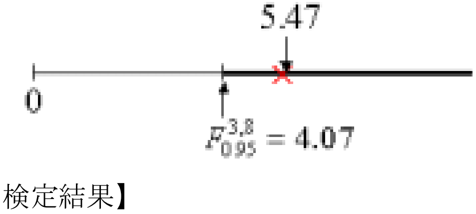
【6-2,6-3 自由度】

$$n_1 = n_{column} - 1 = 4 - 1 = 3$$
$$n_2 = n_{column}(n_{row}-1) = 4(3-1) = 8$$

【6-4 自由度が(n_1, n_2)，分布関数の値が 1-α となる F値】

F分布の数表より，F= 4.07

【7 棄却域　右据検定】



【8 検定結果】

仮説 H_0 を棄却する．（対立仮説 H_1 を受理する）つまり，学生間に有意差があるといえる．

問 3.5

Machine \ Worker	A	B	C	D	Row means
I	3	4	5	4	4
II	4	6	5	5	5
Column means	3.5	5	5	4.5	Grand mean = 4.5

Variation	Degree of freedom	Mean squares	F	Critical value	Row means
$v_r = 2$	2-1=1	$S_r^2 = 2/1 = 2$	$S_r^2 / S_e^2 = 2/0.333 \fallingdotseq 6$	$F_{0.95}^{1,3} = 10.1$	*Accept* H_{01}
$v_c = 3$	4-1=3	$S_c^2 = 3/3 = 1$	$S_c^2 / S_e^2 = 1/0.333 \fallingdotseq 3$	$F_{0.95}^{3,3} = 9.27$	*Accept* H_{02}
$v_e = 1$	(2-1)(4-1) =3	$S_e^2 = 1/3 \fallingdotseq 0.333$			

H_{01} : *All row means are equal.* H_{02} : *All column means are equal.*

問 4.1

x_i	$x_i' = x_i - \bar{x}$	y_i	$y_i' = y_i - \bar{y}$	$x_i'y_i'$	$x_i'^2$	$y_i'^2$
-3	-17/6	0	-17/6	289/36	289/36	289/36
-2	-11/6	1	-11/6	121/36	121/36	121/36
0	1/6	3	1/6	1/36	1/36	1/36
1	7/6	3	1/6	7/36	49/36	1/36
1	7/6	4	7/6	49/36	49/36	49/36
2	13/6	6	19/6	247/36	169/36	361/36
$\sum x = -1$ $\bar{x} = -1/6$		$\sum y = 17$ $\bar{y} = 17/6$		$\sum x_i'y_i' = 714/36$	$\sum x_i'^2 = 678/36$	$\sum y_i'^2 = 822/36$

$$S_{xy} = \frac{714}{36} \times \frac{1}{5} = \frac{714}{180} \fallingdotseq 3.97$$

$$S_x^2 = \frac{678}{36} \times \frac{1}{5} \fallingdotseq 3.77$$

$$S_y^2 = \frac{822}{36} \times \frac{1}{5} \fallingdotseq 4.57$$

$$\sum x_i y_i = \frac{714}{36} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{17}{6}\right) = \frac{612}{36} = 17$$

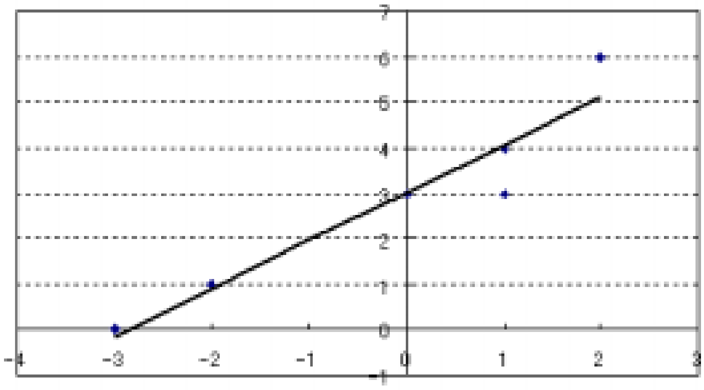
$$\sum x_i^2 = \frac{678}{36} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{684}{36} = 19$$

$$\sum y_i^2 = \frac{822}{36} + 6 \cdot \left(\frac{17}{6}\right)^2 = 71$$

$$a = \frac{17 \cdot 19 - (-1) \cdot 17}{6 \cdot 19 - (-1)^2} \fallingdotseq 3.01$$

$$b = \frac{6 \cdot 17 - (-1) \cdot 17}{6 \cdot 19 - (-1)^2} \fallingdotseq 1.05$$

$$y_{est} = 3.01 + 1.05x$$



(2) $r^2 = \dfrac{3.97^2}{3.77 \cdot 4.57} = 0.915$

(3)

x_i	y_i	$y_{est\,i}$	$y_i - y_{est\,i}$	$(y_i - y_{est\,i})^2$	$y_{est\,i} - \bar{y}$	$(y_{est\,i} - \bar{y})^2$
−3.00	0.00	−0.14	0.14	0.02	−2.97	8.84
−2.00	1.00	0.91	0.09	0.01	−1.92	3.70
0.00	3.00	3.01	−0.01	0.00	0.18	0.03
1.00	3.00	4.06	−1.06	1.12	1.23	1.50
1.00	4.00	4.06	−0.06	0.00	1.23	1.50
2.00	6.00	5.11	0.89	0.79	2.28	5.18
			$\sum (y_i - y_{est\,i})^2 = 1.95$		$\sum (y_{est\,i} - \bar{y})^2 = 20.76$	

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 22.81$$

$$\sum (y_i - y_{est\,i})^2 = 1.95, \quad \sum (y_{est\,i} - \bar{y})^2 = 20.76$$

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 \fallingdotseq \sum (y_i - y_{est\,i})^2 + \sum (y_{est\,i} - \bar{y})^2$$

(4) $S_{error} = \sqrt{\sum (y_i - y_{est\,i})^2 / (n-2)} = \sqrt{1.95/(6-2)} = 0.70$