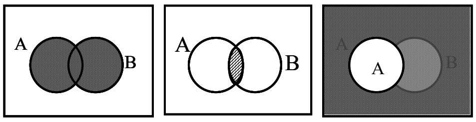
# 1. 順列と組合せ

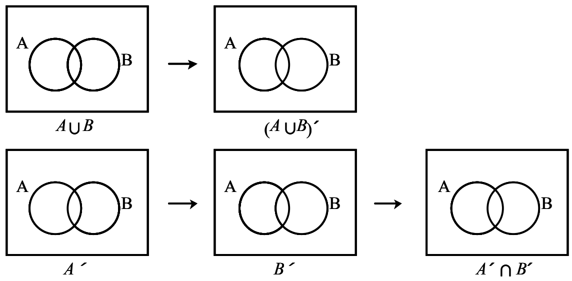
## 1.1 集合

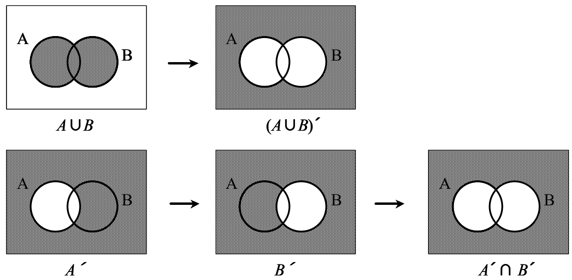


$A\cup B$　　$A\cap B$　　$(A)´$

**[要点1]**

問1　ベン図を使って，ド・モルガンの第一法則：$(A\cup B)´=A´\cap B´$ を証明せよ．




## 1.2 場合の数

**[要点2]** $A=\{a, b\}$, $B=\{1, 2\}$とする．**直積集合** $A\times B$ とは，$A$ と $B$ から得られるすべての組みを要素とする集合$\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$のこと．

問2　$A=\{0, 1\}$, $B=\{2, 3\}$, $C=\{0, 1\}$とする．

(1) 直積集合 $A\times B$ を求めよ．

$A\times B=\{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3)\}$

(2) 直積集合$(A\times B)\times C$を求めよ．

$\{(0,2,0),(0,3,0),(1,2,0),(1,3,0),(0,2,1),(0,3,1),(1,2,1),(1,3,1)\}$

# 2. 確率

## 2.1 事象

**[要点3]試行**：一定の条件の下で何回でも繰り返すことができる実験や観察．[例]　コイン投げ，サイコロ振りなど

**[要点4]事象**：ある試行(例えば，さいころを振る)を行なった結果として起こり得るいろいろな現象を事象という．[例]“表”が出た事象．“出た目が 2 である事象”．また，最も細分化された事象を組み合わせたものも事象という．　[例]　出た目が偶数である事象”．←これは，“2 が出た事象”，“4 が出た事象”，“6 が出た事象”の和集合として定義されている．

### 2.2.1　数学的確率

### 2.2.2　統計的確率，大数の法則

問3　コイン投げをして，“表”が出るか，“裏”が出るかについて，その出方について考えよう．

(1) 自分でコインを投げて得られる結果を下表にまとめよ．ただし，20 回については，自分の結果の他，周囲の 4 人の結果を用いよ．

| 回数 $n$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| “表”が出た回数 $s$ | | | | | |
| $s/n$ | | | | | |
| $0.5- s/n$ | | | | | |

| 回数 $n$ | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| “表”が出た回数 $s$ | | | | | |
| $s/n$ | | | | | |
| $0.5- s/n$ | | | | | |

(2) 回数 $n$ が大きくなるにつれ，「$0.5- s/n$」の値，すなわち，「$s/n$」の 0.5 からのズレは，【小さくなる，大きくなる，変わらない】．

**[要点5]**確率：コイン投げでは，やってみないことには“表”が出るか，“裏”が出るかわからない．“表”とか，“裏”のように，実際に起こることを**事象**という．そして，ある事象が起こる，確からしさの度合を**確率**という．ある事象の起こり得る可能性を数で表わしたものともいえる．過去の頻度(ﾋﾝﾄﾞ)数から推定する**統計的 (経験的)確率**と**数学的確率**とがある．

**[要点6]**統計的確率：$\boxed{\text{事象の生起した回数 } s}\div\boxed{\text{試行の回数 } n}$で定義される相対度数 $s/n$

**[要点7]**数学的確率：起こりうる事象（事柄）が $N$ 通りあって，これらが同様に確からしいとき，ある事象（事柄）が $a$ 通りあれば，その事象の起こり得る可能性を表わした値 $a/N$．確率的な問題のほとんどは，数学的確率に基づいて定式化される．

**[要点8]大数の法則**：試行の全回数 $n$ を大きくしていくと統計的確率 $s/n$ は一定の値，数学的確率に収束していく．

問4　事象として，「“表”が出る」，「“裏”が出る」の二つを考える，前問のコイン投げについては，$s/n$ は【統計的確率，数学的確率】である．一方，起こりうる事象が 2 通りあって，両事象の確からしさが等しいと考え，「“表”が出る」事象が 1 通りであるとして求めた 1/2＝0.5 は【統計的確率，数学的確率】である．

問5　事象として，コインを 2 回投げ，これを 1 セットとしたときの表裏のパターンについて考える．表表，表裏，裏表，裏裏の 4 通りのパターンがある．その内，表が 1 回出る場合のパター

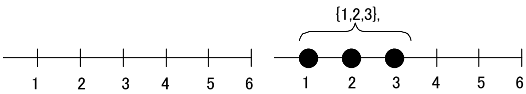
年　月　日　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　学年＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

ン数は 2 である．これを，全パターン数 4 で除した（割った），2/4＝1/2 は【統計的確率，数学的確率】である．実際に何度も何度もコインを投げた．その結果，全セット数 100 の内，56 回だけ表が 1 回出た．このとき，56/100=14/25 は【統計的確率，数学的確率】である．

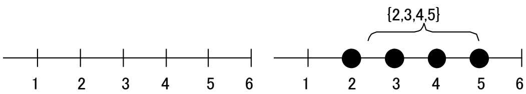
## 2.2.4　和事象の確率(“または”の確率)

問6　サイコロを 2 回続けて振って，出てくる目について考えよう．例えば，4,5,6 の目のいずれかの出る事象を，「一回目に{4,5,6}」のように表す．また，「一回目に{4,5,6}」の確率を $P$ (一回目に{4,5,6})と表す．

(1) $P$ (一回目に{1,2,3})=3/6=1/2



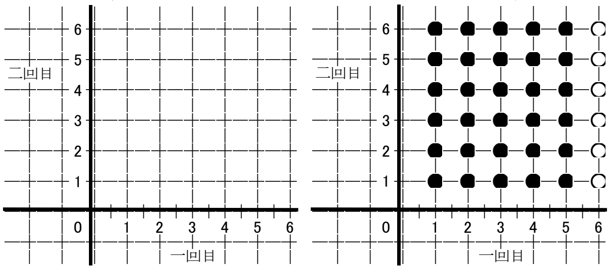

(2) $P$ (一回目に{2,3,4,5})=4/6=2/3




(3) 一回目に{1,2,3} **または** 一回目に{2,3,4,5} ={1,2,3,4,5　　}

該当箇所に●を描き込め．また，事象としては存在するが，条件に適合しない箇所に○を描け．

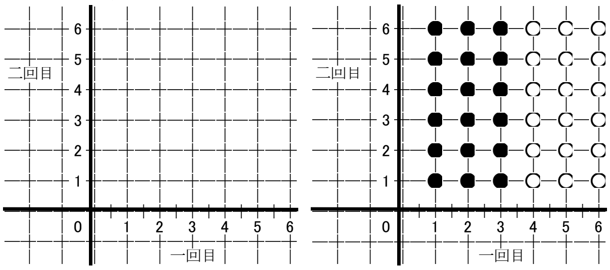
[ヒント]　作図二回目についてコメントしていない場合には，「二回目はいくつでもよい」と解釈する．




(4) $P$(一回目に{1,2,3}**または**一回目に{2,3,4,5})=5/6

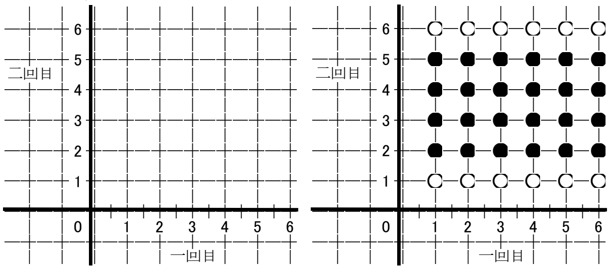
(5) 一回目に{1,2,3}

該当箇所に●を描き込め．また，事象としては存在するが，条件に適合しない箇所に○を描け．

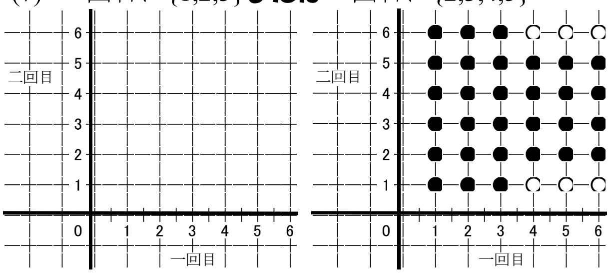



(6) 二回目に{2,3,4,5}

該当箇所に●を描き込め．また，事象としては存在するが，条件に適合しない箇所に○を描け．



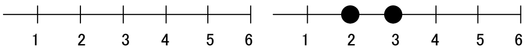

(7) 一回目に{1,2,3}**または**二回目に{2,3,4,5}

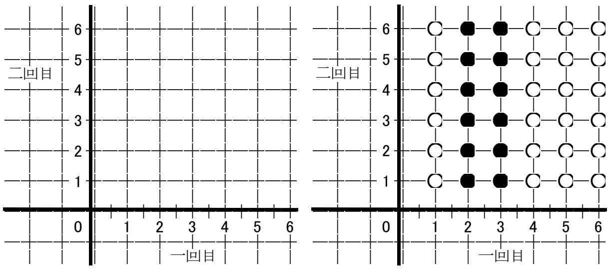



(8) $P$ (一回目に{1,2,3} **または** 二回目に{2,3,4,5})=30/36=5/6

## 2.2.5　積事象の確率(“かつ”の確率)

(9) 一回目に{1,2,3}**かつ**一回目に{2,3,4,5}={2,3　}





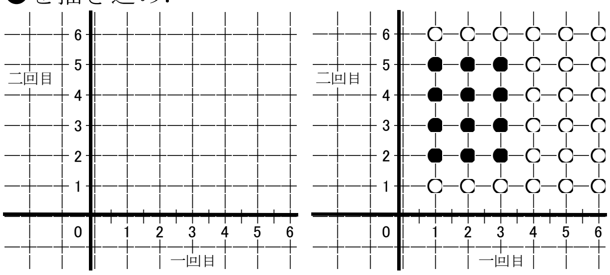

(10) $P$ (一回目に{1,2,3} **かつ** 一回目に{2,3,4,5})=2/6=1/3

(11) $P$ (一回目に{1,2,3})+$P$(一回目に{2,3,4,5})－$P$ (一回目に{1,2,3} **かつ** 一回目に{2,3,4,5})=3/6+4/6-2/6=5/6

(12)　“同じ”試行で定義された複数の事象について，(4)と(11)の結果は【一致する，一致しない】．

(13) 一回目に{1,2,3}**かつ**二回目に{2,3,4,5}

●を描き込め．




(14) $P$ (一回目に{1,2,3} **かつ** 二回目に{2,3,4,5})=12/36=1/3

(15) $P$ (一回目に{1,2,3})+ $P$(二回目に{2,3,4,5})－$P$ (一回目に{1,2,3} **かつ** 二回目に{2,3,4,5})=3/6+4/6-2/6=5/6

(16)“異なる”試行で定義された複数の事象について，(8)と(16)の結果は【一致する，一致しない】．

このように，以下が成り立つ．

**[要点9]**加法法則

A または B の起こる確率 ＝ A の起こる確率 ＋ B の起こる確率 － A かつ B の起こる確率

問7　男，女の高校生，大学生が，下表の人数で，合計 100 人，ある部屋におり，ランダムに 1 名が部屋から出てくるものとする．このとき，“どのような人が出てくるか”は，実際に見てみないことにはわからない．したがって，この問題

は確率の問題である．ここでの事象は，“女子”，あるいは “男子” という，性別に関する事象，そして “大学生” あるいは “高校生” という，校種に関する事象の二つがある．さて，各事象の生起する確率を求めよ．

(1) $P$(女子)= 60/100=3/5

(2) $P$(大学生)= 50/100=1/2

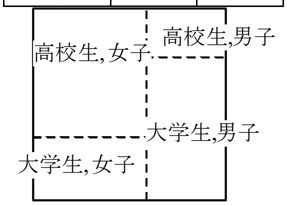
(3) $P$(女子**かつ**大学生)= 20/100=1/5

(4) $P$(女子**または**大学生)= 90/100=9/10

(5) $P$ (女子)+ $P$ (大学生)－$P$ (女子**かつ**大学生)= 3/5+1/2-1/5=9/10

(6) 上の(4)と(5)の結果は【一致する, 一致しない】.

| | 女子 | 男子 |
|---|---|---|
| 高校生 | 40 人 | 10 人 |
| 大学生 | 20 人 | 30 人 |




### 2.2.6 結合事象

**[要点10]**結合事象：ある試行において，例えば “男子”，“女子” というように事象が生起するものとする．別のある試行において，例えば “大学生”，“高校生” というように事象が生起するものとする．これらの異なる試行の事象を結合させてできる事象，例えば，“女子”，かつ “大学生”（その意味で，“女子大学生”）というような事象のことを**結合事象**という．積事象は，異なる試行で定められた複数の事象の**かつ**（これは結合事象という）のみならず，同一の試行で定められた複数の事象の**かつ**（通常，結合事象とはいわない）をも包含した概念である．

問8　5 円玉を 1 回投げて出た裏表の事象，10 円玉を 1 回投げて出た裏表の事象から，結合事象をすべて書け．

[例] 5 円玉が裏，かつ 10 円玉が裏.

5 円玉が裏，かつ 10 円玉が表.

5 円玉が表，かつ 10 円玉が裏.

5 円玉が表，かつ 10 円玉が表.

問9　5 円玉を 3 回投げた．1 回目に出た裏表の事象，2 回目に出た裏表の事象，3 回目に出た裏表の事象から，結合事象をすべて書け．

[例] 1 回目に 5 円玉が裏，かつ 2 回目に 5 円玉が裏，かつ 3 回目に 5 円玉が裏．これを 000 と書く．表は 1 と書くと，

001.
010.
011.
100.
101.
110.
111.

問10　サイコロを 2 回投げた．1 回目に出た目の偶数，奇数の事象，2 回目に出た目の 3 以下，4 以上の事象から，結合事象をすべて書け．

[例] 1 回目に偶数，かつ 2 回目に 3 以下.

1 回目に偶数，かつ 2 回目に 4 以上.

1 回目に奇数，かつ 2 回目に 3 以下.

1 回目に奇数，かつ 2 回目に 4 以上.

**[要点11]**異なる試行で定義された積事象）の確率前問の例で説明する．「“女子” 40 人+20 人に対する，“大学生” 20 人の割合」は，一般に，「事象 “女子” の条件の下で，事象 “大学生” が生起する確率」という意味で，条件付確率と呼ばれ，$P$(大学生｜女子)と表す.

**[要点12]**条件付確率：前問の例で説明する．「“女子” 40 人+20 人に対する，“大学生” 20 人の割合」は，一般に，「事象 “女子” の条件の下で，事象 “大学生” が生起する確率」という意味で，条件付確率と呼ばれ，$P$(大学生｜女子)と表す.

[例] $P$(大学生｜女子)＝20/(40＋20)＝1/3

問11　$P$(高校生｜女子)＝40/(40＋20)＝2/3

問12　$P$(大学生｜男子)＝30/(10＋30)＝3/4

問13　$P$(高校生｜男子)＝10/(10＋30)＝1/4

問14　$P$(女子｜大学生)＝20/(20＋30)＝2/5

問15　$P$(男子｜大学生)＝30/(20＋30)＝3/5

問16　$P$(女子｜高校生)＝40/(40＋10)＝4/5

問17　$P$(男子｜高校生)＝10/(40＋10)＝1/5

問18　$P$(女子)＝(40+20)/(40+20+10+30)＝3/5

以下，男子は男，女子は女，大学生は大，高校生は高と書く．

問19　$P$（大，女）＝$P$（大**かつ**女）＝$P$（女大）＝20/(40+20+10+30)＝1/5

問20　$P$(大，女)+ $P$(高，女)= 1/5+2/5＝3/5

問21　「$P$(女)」と「$P$(大, 女)+$P$(高, 女)」は，【一致する，一致しない】.

問22　「$P$(男)」と「$P$(大，男)+$P$(高，男)」は一致する.

問23　「$P$(大)」と「$P$(大,男)+$P$(大,女)」は一致する.

**[要点13]**$P$ (女)= $P$ (大,女)+ $P$ (高,女)

**[要点14]**$P$ (大|女)= $P$ (大,女)÷$P$ (女)

**[要点15]**$P$ (大|女)= $P$ (大,女)÷{$P$ (大,女)+ $P$ (高,女)}

問24　$P$(大｜女) $P$(女)＝1/3×3/5=1/5

問25　「$P$(大, 女)」と「$P$(女)×$P$(大|女)」は，【一致する，

年　　月　　日　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　学年＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿

一致しない】．これは以下のように考えれば容易に理解できよう．すなわち，「全体に対する女子大学生の割合」は，「全体に対する女子の割合」に「女子に対する大学生の割合」を乗じた（掛け算した）ものに等しい．

問26　$P$(大)×$P$(女|大)＝5/10×2/5＝1/5．これも，「$P$(大，女)」に，【一致する，一致しない】．

**[要点16]**乗法法則：

$P$(大,女)　＝　$P$(大|女)　$P$(女)

または，

$P$(大,女)　＝　$P$(女|大)　$P$(大)

問27　$P$(女，高)について，乗法法則を確認せよ．

$P$(女，高)＝2/5

$P$(高｜女) $P$(女)＝2/3×3/5＝2/5.

問28　$P$(男，高)について，乗法法則を確認せよ．

$P$(男，高)＝1/10

$P$(高｜男) $P$(男)＝1/4×4/10＝1/10.

## 3. 確率変数と確率分布

### 3.1　離散型確率関数

**[要点17]確率変数**：偶然に生起する事象に対応付けた実数．その事象は偶然に（確率的に）変化するので，その実数も偶然に（確率的に）変化する．その意味で確率変数という．なお，例えば，$P(0)$は，確率変数が値0をとる確率を表すが，“値0に対応付けられた事象”が生起する確率である．これを一般化して書くと，確率変数$X$について，その生起した値は小文字$x$で書くこととすれば，$P(x)$は確率変数$X$の値$x$が生起する確率を表す．

問29　コイン投げを考えよう．

(1) 偶然に生起する事象の一つである“裏”に“0”を対応付ける．同様に，偶然に生起する事象の他の一つである“表”に“1”を対応付ける．このような値，0，あるいは1をとる変数は，確率変数で【ある，ない】．

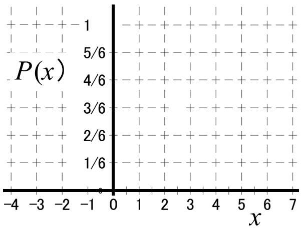
(2) 偶然に生起する事象の一つである“裏”に“0.1”を対応付ける．同様に，偶然に生起する事象の他の一つである“表”に“0.01”を対応付ける．このような値，0.1，あるいは0.01をとる変数は，確率変数で【ある，ない】．

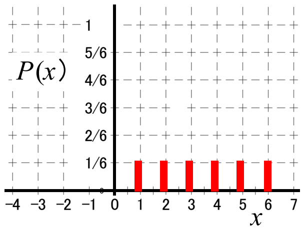
(3) 偶然に生起する事象の一つである“裏”に“0”を対応付ける．同様に，偶然に生起する事象の他の一つである“表”に“1と−1”を対応付ける．このような値をとる変数は，確率変数で【ある，ない】．

(4) 偶然に生起する事象の一つである“裏”，および“表”のような値をとる変数は，確率変数で【ある，ない】．

問30　サイコロ振りを考えよう．

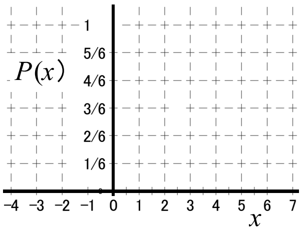
(1) 偶然に生起する事象，“1の目”に変数$x$=1を，“2の目”に$x$=2を，“3の目”に$x$=3を，“4の目”に$x$=4を，“5の目”に$x$=5を，“6の目”に$x$=6を，対応付ける．このような値をとる変数は，確率変数で【ある，ない】．このとき，$P(0)$=0＿＿，$P(1)$=1/6＿＿，$P(2)$=1/6＿＿，$P(3)$=1/6＿＿，$P(4)$=1/6＿＿，$P(5)$=1/6＿＿，$P(6)$=1/6＿＿，$P(7)$=0＿＿となる．ここで，確率変数に対して値をとるものは**確率関数**という．さて，本問の確率関数を図示せよ．[注意]生起しない値の確率は0.

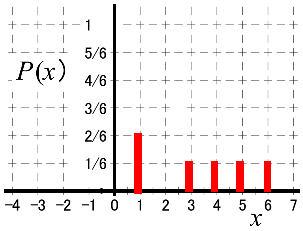



(2) 偶然に生起する事象，“1の目”に$x$=−6を，“2の目”に$x$=−5を，“3の目”に$x$=−4を，“4の目”に$x$=−3を，“5の目”に$x$=−2を，“6の目”に$x$=−1を，対応付ける．このような値をとる変数は，確率変数で【ある，ない】．

(3) 偶然に生起する事象，“1の目”に$x$=1を，“2の目”に$x$=1を，“3の目”に$x$=3を，“4の目”に$x$=4を，“5の目”に$x$=5を，“6の目”に$x$=6を，対応付ける．このように複数のさいころの目が同一の値をとるものは，確率変数としては相応しくないと思うかもしれない．しかし，この場合には，事象“1または2の目”は，“1の目”や“2の目”といった，もとの事象（**根元事象**という）の和集合として定められる事象であり，これに$x$=1を対応させたと考えればよい．したがって，この変数は，確率変数で【ある，ない】．このとき，$P(1)$=2/6＿＿，$P(2)$=0＿＿，$P(3)$=1/6＿＿，$P(4)$=1/6＿＿，$P(5)$=1/6＿＿，$P(6)$=1/6＿＿となる．本問の確率関数を図示せよ．



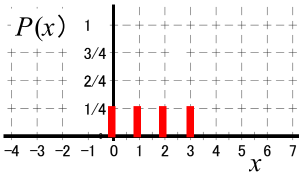




(4) 偶然に生起する事象，“1の目”に“$x$=0と1”を，“2の目”に$x$=2を，“3の目”に$x$=3を，“4の目”に$x$=4を，“5の目”に$x$=5を，“6の目”に$x$=6を，対応付ける．このように同一のさいころの目に複数の値を対応付けたものはどうだろう．すべての変数の値に対応して定義されている確率の和は1でなければならない．今回のやり方では，その和は1に【なる，ならない】．したがって，この変数は，確率変数で【ある，ない】．

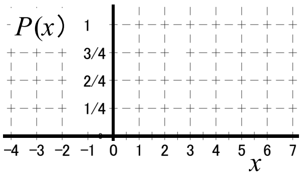
問31　コインを2回投げたとする．$H$と$T$はそれぞれコインの表と裏を表す．コインには偏りがないものとする．このとき，

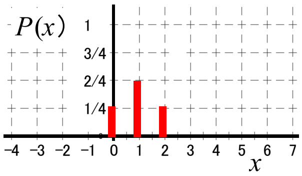
(1) 2回の$H$と$T$の出方は，$HH$, $HT$, $TH$, $TT$のいずれかである．変数$X$の値を，それぞれに，$x$=0,

1，2，3 のように対応付けたとする．このような変数 $X$ は，確率変数で【ある，ない】．$P(0)$=1/4，$P(1)$=1/4，$P(2)$=1/4，$P(3)$=1/4 となる．本問の確率関数を図示せよ．


(2) 変数 $X$ は表の出た回数を表すものとする．このとき，$HH$, $HT$, $TH$, $TT$ のそれぞれには，値 2, 1, 1, 0 が対応付けられる．このような変数 $X$ は，確率変数で【ある，ない】．$P(0)$=1/4，$P(1)$=1/2，$P(2)$=1/4，$P(3)$=0 となる．本問の確率関数を図示せよ．




### 3.2.2 独立と従属

問32

(1) “高”との条件を満たした上で，“女”の確率と“男”の確率の比は 0.42 : 0.18=7 : 3 となる．一方，“大”のとき，“女”の確率と“男”の確率の比は 0.28 : 0.12=7 : 3 となる．したがって，事象“高”，“大”のいずれの場合も，事象“男”，“女”の確率，は【変わらない，変わる】．このような状況を，男/女の事象の生起と，高/大の事象の生起とは無関係であることから，男/女の事象と高/大の事象は，独立であるという．

$P(x,y)$

| $Y$ の事象，男/女 ＼ $X$ の事象，高/大 | $P$(女)=0.7 | $P$(男)= 0.3 |
|---|---|---|
| $P$(高)= 0.6 | 0.42 | 0.18 |
| $P$(大)= 0.4 | 0.28 | 0.12 |

(2) なお，“高”との条件の下での“女”の確率は，条件付確率 $P$(女|高)により表すことができる．これは，$P$(女,高)÷{ $P$(女,高)+ $P$(男,高)}により与えられ，本例では，0.42÷{ 0.42+0.18}=0.7 となる．また，“大”との条件の下での“女”の確率は，条件付確率 $P$(女|大)により表すことができる．これは，$P$(女,大)÷{ $P$(女,大)+ $P$(男,大)}により与えられ，本例では，0.28 ÷{ 0.28+0.12}=0.7 となる．このように，$P$(女|高)と $P$(女|大)が等しいことが，男/女の事象と高/大の事象が【独立である，従属している】ことを意味する．

(3) まず，下表の空欄を埋めよ．さて，本例では，“高”との条件を満たした上で，“女”の確率と“男”の確率の比は 0.4 : 0.1=4:1 となる．一方，“大”のとき，“女”の確率と“男”の確率の比は 0.2 : 0.3 =2:3 となる．したがって，事象“高”，“大”のいずれかによって，事象“男”，“女”の確率，は【変わらない，変わる】．このような状況を，男/女の事象の生起と，高/大の事象の生起と関係があることから，男/女の事象と高/大の事象は，【独立である，従属している】という．

$P(x,y)$

| $Y$ の事象，男/女 ＼ $X$ の事象，高/大 | $P$(女)=0.6 | $P$(男)= 0.4 |
|---|---|---|
| $P$(高)= 0.5 | 0.4 | 0.1 |
| $P$(大)= 0.5 | 0.2 | 0.3 |

**[要点18]** $X$ と $Y$ とが**独立**：$X$ の事象（確率変数としたときには実現値）がいずれであっても（例えば，$x_1$ であっても，$x_2$ であっても），$Y$ の事象（例えば，$y_1$ または $y_2$）の生起とは無関係

### 3.3 離散型確率変数の平均

問33

(1) A のくじ引きでは 1$の当たりが 100 本，10$の当たりが 10 本，100$の当たりが 1 本ある．くじ引き券が 1000 枚発行されたとする．確率変数 $X$ を A のくじ引きの当たり金額とする．このとき，賞金の総額は，1$の当たり 100 本に対して 1$×100 = 100$，10$の当たりが 10 本に対して 10$×10 = 100$，100$の当たりが 1 本に対して 100$×1 = 100$，合計で 300$となる．これに対して“くじの総数”は 1000 本なので，1 本当たりでは 300$÷1000= 0.3$となる．これが，$X$ の**期待値**（expectation），すなわち $X$ の平均となる．

(2) ここで，“当たりの本数”÷“くじの総数”は，それぞれの“当たりの確率”となる．例えば，“1$の当たりの確率”=100/1000＝0.1 である．さて，これを考え合わせると，先の計算での，“賞金”×“当たりの本数”÷“くじの総数”は“賞金”×“当たりの確率”となる．すなわち，1$の当たりについては，1$×(100 /1000)= 0.1$，10$の当たりについては，10$×(10 /1000)= 0.1$，100$の当たりについては，100$×(1 /1000)= 0.1$，合計で 0.3$となる．

**[要点19]** $\sum_{i=1}^{n} f_i$ の意味：$i$=1 から $n$ まで，すべての $i$ について $f_i$ を求め，それらの総和をとる．

[例]

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i P(x_i) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + x_3 P(x_3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + x_3 P(x_3) + \cdots + x_n P(x_n)$$

**[要点20]** 確率変数 $X$ の平均(mean)$\mu_X$ は，$X$ の期待値 $E[X]$であり，$x$ と確率 $P(x)$ との積和，すなわち，

年　　月　　日　学籍番号　　　　　　　　　　学年　　　　氏名

$\mu_X=E[X]=\sum_{i=1}^{n} x_iP(x)$

$= x_1P(x_1) + x_2P(x_2)+ x_3P(x_3)+\cdots+ x_nP(x_n)$

により与えられる．この式のように，各 $i$ の値 $x_i$ に，$\sum_{i=1}^{n} P(x_i)=1$ となるような係数 $P(x_i)$を掛けて和をとるような計算，すなわち$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_iP(x)}$を，$\boxed{P(x_i)を}$ $\boxed{重みとして x_i の平均をとる}$といい，係数を**重み係数**といい，得られた値を**加重平均（重みつき平均）**という．

問34

(1) $B$ のくじ引きには，\$50 の当たりが 8 本入っている．くじ引き券が 500 枚発行されたとする．確率変数 $Y$ を $B$ のくじ引きの当たり金額とする．$Y$ の期待値は，

$\mu_Y=E[Y]=y_1P(y_1)+y_2P(y_2)=50*8/500+0*492/500=0.8\$$

(2) くじを 1 枚ずつ引き，引いた後で元に戻すものとすると，$A$ のくじを 2 枚と，$B$ のくじを 3 枚買った場合には，$A$ の期待値の 2 倍と $B$ の期待値の 3 倍の和，すなわち 0.3\$×2+0.8\$×3＝3.0\$が期待できる．このことから，$E[2X+3Y]=$ 2 $E[X]+$3 $E[Y]$ であることがわかる．

(3) これに加えて，2\$は必ず貰えるということであれば，賞金として，3.0\$+2\$＝5.0\$が期待できる．このことから，$E[2X+3Y+2]= 2E[X]+3E[Y]$ + 2 であることがわかる．

**[要点21]** $E [aX+bY+ c] = aE[X]+ bE[Y] + c$

問35

(1) くじ $A$ の事象には{\$1 の当たり，10\$の当たり，100\$の当たり，外れ}がある．くじ $B$ の事象には{\$50 の当たり，外れ}がある．くじ $A$ とくじ $B$ の両方を引いた時の賞金を扱うとき，例えば，“くじ $A$ で 1\$の当たり”かつ“くじ $B$ で 50\$の当たり”というような組み合わせの状況（確率用語では，結合事象）を考えなければならない．これを“1\$，50\$”と書くと，この結合事象としては，その他，以下がある．

“1 \$，外れ ”，
“10 \$，50 \$”，
“10 \$，外れ ”，
“100 \$，50 \$”，
“100 \$，外れ ”，
“外れ ，50 \$”，
“外れ ，外れ ”，

(2) そして，$A$ と $B$ の結合事象に対する確率（**結合確率**という）は，一般には $P(x_i, y_j) = P(x_i)\ P(y_j \mid x_i)$であるが，特に $A$ と $B$ が独立しているときには，$A$ の確率= $P(x_i)$と $B$ の確率 $P(y_j)$を乗ずれば（掛け算すれば）よかった．例えば，$P$ (“$A$，1\$”かつ“$B$，50\$”)は，具体的には(100/1000)×(8/500) =800/500000 となる．その他についても，同様に求めよ．

$P$ (\$1，外れ)= (100/1000)×(492/500)=49200 /500000
$P$ (\$10，\$50)= (10/1000)×(8/500) =80 /500000
$P$ (\$10，外れ)= (10/1000)×(492/500)=4920 /500000
$P$ (\$100，\$50)= (1/1000)×(8/500) =8 /500000
$P$ (\$100，外れ)= (1/1000)×(492/500) =492 /500000
$P$ (外れ，\$50)= (889/1000)×(8/500) =7112/500000
$P$(外れ,外れ)=(889/1000)×(492/500)=437388/500000

(3) そして，$2X+3Y+2$ を考えるならば，結合事象“1\$，50\$”については，値（賞金と思えばよい）は $2X+3Y+2=2・1+3・50+2=154$ となる．その他についても，同様に値を求めよ．

“\$1，外れ”の値は，2・1+3・0+2=4
“\$10，\$50” の値は，2・10+3・50+2=172
“\$10，外れ” の値は，2・10+3・0+2=22
“\$100，\$50” の値は，2・100+3・50+2=352
“\$100，外れ” の値は，2・100+3・0+2=202
“外れ，\$50” の値は，2・0+3・50+2=152
“外れ，外れ” の値は，2・0+3・0+2=2

(4) 例えば，結合事象“1\$, 50\$”については，$2X+3Y+2$ について，値×確率は，154×(100 /1000)×(8 /500)となる，その他についても，同様に値×確率を求めよ．

“\$1，外れ”については，4×49200 /500000
“\$10，\$50” については，172×80 /500000
“\$10，外れ” については，22×4920 /500000
“\$100，\$50” については，352×8 /500000
“\$100，外れ” については，202×492 /500000
“外れ，\$50” については，152×7112/500000
“外れ，外れ” については，2×437388/500000

これらの総和は，2500000/500000=5 となり，これは先に求めた $E[2X+3Y+2]= 2E[X]+3E[Y]$ + 2 に一致する．

**[要点22]** $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{i,j}$ の意味：$i$=1 から $n$ まで，$j$=1 から $m$ まで，すべての $i$, $j$ の組み合わせについて $f_{i,j}$ を求め，それらの総和をとる．

[例]

$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} (4x_i+5y_j+6)=(4x_1+5y_1+6)+(4x_1+5y_2+6)+$
$(4x_1+5y_3+6)+(4x_2+5y_1+6)+(4x_2+5y_2+6)+(4x_2+5y_3+6)$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (4x_i+5y_j+6)=$
$(4x_1+5y_1+6)+(4x_1+5y_2+6)++\cdots+(4x_n+5y_m+6)$

$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_iy_j(4x_i+5y_j+6)=$
$x_1y_1 (4x_1+5y_1+6)+ x_1y_2(4x_1+5y_2+6)+x_1y_3(4x_1+5y_3+6)+$
$x_2y_1(4x_2+5y_1+6)+ x_2y_2(4x_2+5y_2+6)+ x_2y_3(4x_2+5y_3+6)$

**[要点23]** $E[aX+bY+c] =\sum_i \sum_j (ax_i+by_j+c)\ P(x_i, y_j)$

**[要点24]** $E [XY] =\sum_i \sum_j x_iy_jP(x_i, y_j)$

**[要点25]** これらを一般化すると，
$E$[$X$ と $Y$ の関数] $=\sum_i \sum_j$ ($x_i$ と $y_j$ の関数の値) $P(x_i, y_j)$

もちろん，以下も成り立つ．

$E[X\text{の関数}] = \sum_{i} (x_i\text{の関数の値})\, P(x_i)$

問36　ある学級の生徒 100 人から，4 人を抽出して得られた体重のデータが，72，74，75，79 であった．このときの平均$\bar{X}$はいくつか？

$\bar{X}$=(72+74+75+79)／4=300/4＝75

**[要点26]** $x_1$，$x_2$，…，$x_n$ のようにデータ（標本）が得られたとき，これらの標本から，平均$\mu_X$の推定値$\bar{X}$は**標本平均**と呼ばれ，次式で表される．

$$\bar{X}=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/\,n = (x_1+x_2+\text{---}+x_n)/\,n$$

問37　コイン投げをしよう．確率変数 $X$ として表を 1，裏を 0 とする．

(1) 偏りのないコインと仮定すると，平均（期待値）$\mu_X$=0.5×0+0.5×1=0.5 となる．

(2) 実際にコインを投げた時のデータとして，2.2.2 の問いのデータを用いて，標本平均$\bar{X}$を求めよ．

| 回数 $n$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| “表”が出た回数 $s$ | | | | | |
| $\bar{X}=s/n$ | | | | | |

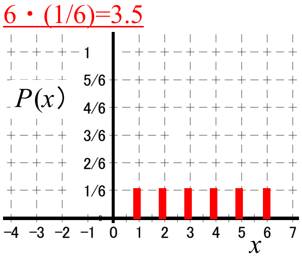
| 回数 $n$ | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| “表”が出た回数 $s$ | | | | | |
| $\bar{X}=s/n$ | | | | | |

(3) 上の表の結果から，標本平均$\bar{X}$のばらつきの範囲は，平均（期待値）$\mu_X$の【近くに狭まっていく，から離れるように広がっていく】ことがわかる．これは大数＿＿の法則による．

問38　サイコロを振って出た目について考えよう．

(1) 偶然に生起する事象，“1 の目”に確率変数 $x$=1 を，“2 の目”に $x$=2 を，“3 の目”に $x$=3 を，“4 の目”に $x$=4 を，“5 の目”に $x$=5 を，“6 の目”に $x$=6 を，対応付ける．これに対して求められるのは平均$\mu_X$である．その平均$\mu_X$を求めよ．

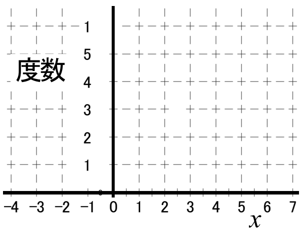
$\mu_X$＝1・(1/6)+ 2・(1/6)+ 3・(1/6)+ 4・(1/6)+ 5・(1/6)+ 6・(1/6)=3.5

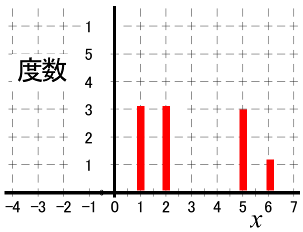



(2) 実際にサイコロを振って出た目が，第一セットの 10 回で 21551 22165，第二セットの 10 回で 55122 56165 であった．これに対して求められるのは標本平均$\bar{X}$である．第一セット，第二セット，それぞれについて，その標本平均$\bar{X}$を求めよ．第一セットについてヒストグラム（度数分布図）を描け．“度数”は“回数”を意味する．

第一セットの$\bar{X}$＿=(2+1+5+5+1+ 2+2+1+6+5)/10=3.0

第二セットの$\bar{X}$＿=(5+5+1+2+2+ 5+6+1+6+5)/10=3.8



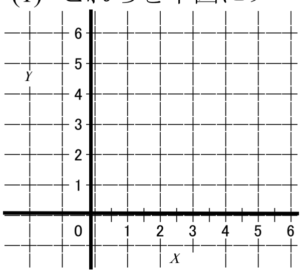

問39　確率変数 $X$ に関して求められる標本平均$\bar{X}$と先の平均（期待値）$\mu_X$とは，どこが違うのであろうか? 標本平均$\bar{X}$は，実際に生起したデータ（標本）から求められる．したがって，個数としては同じ 1 セット 10 個のデータからでも，セットごとに標本平均$\bar{X}$は【変動する，変動しない】．一方，平均（期待値）$\mu_X$は，各事象の値と確率が与えられれば，【変動する，変動しない】．抽象的であるが，思い切って表現すると，標本平均$\bar{X}$は【現実世界，理想世界】を反映し，平均（期待値）$\mu_X$は【現実世界，理想世界】を反映する．さらに抽象的な言い方であるが，標本平均$\bar{X}$は【統計的確率，数学的確率】に類似し，平均（期待値）$\mu_X$は【統計的確率，数学的確率】に類似した概念である．

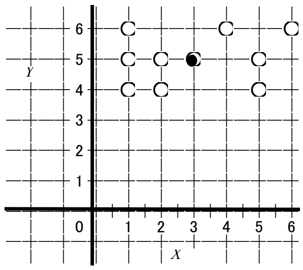
## 3.4 離散型確率変数の分散と標準偏差

### 3.4.1 分散

問40　確率変数 $X$ と $Y$ の組$[x_i\ y_i]$として個々のデータが定義されている，標本[3 5], [1 5], [5 4], [1 6], [4 6]，[2 4]，[2 5]，[1 4]，[6 6]，[5 5]がある．

(1) これらを下図にプロットせよ．




(2) 図から，$X$ のばらつきの大きさは，$Y$ のばらつきの大きさより【大きい，等しい，小さい】ことが見てとれる．

(3) 標本平均$\bar{X}$, $\bar{Y}$を求め，図に黒丸でプロットせよ．

$\bar{X}$＿=(3+1+5+1+4+ 2+2+1+6+5)/10=3.0

$\bar{Y}$＿=(5+5+4+6+6+ 4+5+4+6+5)/10=5.0

(4) $X$，$Y$について，各データ $x_i$ の標本平均$\bar{X}$からの差（$x_i-\bar{X}$）など，下表を埋めよ．

| 回数 $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 総和 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 3 | 1 | 5 | 1 | 4 | 2 | 2 | 1 | 6 | 5 | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x_i-\bar{X})$ | 0 | -2 | 2 | -2 | 1 | -1 | -1 | -2 | 3 | 2 | 0 |
| $(x_i-\bar{X})^2$ | 0 | 4 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 | 4 | 9 | 4 | 32 |
| $y_j$ | 5 | 5 | 4 | 6 | 6 | 4 | 5 | 4 | 6 | 5 | |
| $(y_j-\bar{Y})$ | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| $(y_j-\bar{Y})^2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 6 |

(5) ばらつきの大きさを測る物差しとして，各データ $x_i$ の標本平均 $\bar{X}$ からの差（$x_i-\bar{X}$）を利用することが思い浮かぶかもしれない．しかし，表のように，その総和は＿0＿になってしまい，使えない．しかし，$(x_i-\bar{X})^2$ や $(y_j-\bar{Y})^2$ など，差の＿2＿乗なら，どうだろうか．これらの総和は，＿$X$,（$x_i$ も可）＿のばらつきの大きさが，＿$Y$（$y_i$ も可）＿のばらつきの大きさより大きいというような，ばらつきの大きさの違いを【反映している，反映していない】．とはいえ，差の 2 乗について，単に総和をとるだけだとデータ数が増加すると，それに応じて【増加，減少】してしまう．データ数 $n$ が増加しても，基本的には変わらないようにするには，どうすればよいのだろうか？その総和を“データ数－1”で割って，概ね一個当たりの値に変換すればよい．これは**標本分散**と呼ばれる“データ数”で割らずに，“データ数－1”で割る理由については教科書 105 ページで自習せよ．本問でこれを求めてみると，小数点以下 2 桁では，

$s_X^2$=＿32/(10－1)＝32/9≒3.55

$s_Y^2$=＿6/(10－1)＝2/3≒0.67

(6) 標本分散は差の 2 乗について求めた．したがって，データのばらつきを直接反映させるには，標本分散の【2 乗，平方根】をとればよいと考えられる．これを標本から求めた標準偏差との意味で**標本標準偏差**とよぶ．標本数が 10 以下のときには，若干の補正が必要であることを追記しておく（興味のある人は教科書参照）．本問でこれを求めよ．ただし，$\sqrt{2}$≒1.4，$\sqrt{3}$≒1.7 とせよ．

$s_X$＝＿$\sqrt{32/9}$≒　　　1.9

$s_Y$=＿$\sqrt{2/3}$≒　　　0.82

(7) 標本標準偏差 $s_X$ は $s_Y$ に対して，概ね【1，2，3】倍になっており，標本標準偏差がばらつきの大きさを直接的に反映した物差し（統計用語では，このような物差しのことを**測度**という）になっていることがわかる．

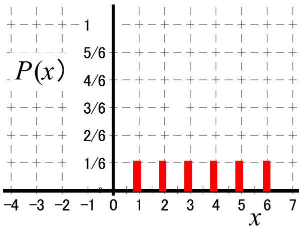
**[要点27]** 確率変数 $x$ について，$x_1$，$x_2$，…，$x_n$ のようにデータ（標本）が得られたとき，これらの標本から，確率変数 $x$ のばらつきの大きさ（正確には，ばらつきの大きさの 2 乗）を表す**標本分散**は，次式で求められる．これは**不偏分散**（unbiased variance）ともよばれる．

$$s_X{}^2=\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2\}／(n-1)$$

$$=\{(x_1-\bar{X})^2+(x_2-\bar{X})^2+\text{---}+(x_n-\bar{X})^2\}/(n-1)$$

**[要点28]** 標本分散の平方根 $s_X$ は**標本標準偏差**といい，ばらつきの大きさを反映する．

問41　確率分布が与えられた場合には，どうすればよいのだろうか．前節のように，標本から，ばらつきの大きさ（正確には，ばらつきの大きさの 2 乗）を表す標本分散を求めるには，各データ（確率変数の値）$x_i$ の標本平均 $\bar{X}$ からの差の 2 乗，すなわち（$x_i-\bar{X}$）$^2$ を利用した（[要点 27]参照）．さて，確率分布が与えられた場合には，標本平均 $\bar{X}$ ではなく，平均 $\mu_X$ が得られる．したがって，$\bar{X}$ の代わりに $\mu_X$ を用いればよい．すなわち，$(x_i-\mu_X)^2$ を利用すればよい．ただし，$x_i$，それぞれで生起の可能性，つまり確率 $P(x_i)$ が異なる．それを考慮するため，確率 $P(x_i)$ を重みとして重みつき平均（[要点 20]参照）を求めればよい．では，サイコロの問題に例をとり，ばらつきの大きさを考えよう．




(1) 図の確率分布（あるいは確率関数）について，下表に従って，(確率変数の値－平均 $\mu_X$)$^2$ の期待値 $\sigma_X{}^2$，および，その平方根 $\sigma_X$ を求めよ．なお，$\mu_X$ =3.5 である．$\sqrt{2.92}$≒1.71．小数点以下 2 桁でよい．

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 総和 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x_i-\mu_X)$ | -2.5 | -1.5 | -0.5 | 0.5 | 1.5 | -2.5 | 0 |
| $(x_i-\mu_X)^2$ | 6.25 | 2.25 | 0.25 | 0.25 | 2.25 | 6.25 | 17.5 |
| $P(x_i)$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | |
| $(x_i-\mu_X)^2P(x_i)$ | 1.042 | 0.375 | 0.042 | 0.042 | 0.375 | 1.04 | $\sigma_X{}^2$ ≒ 2.92 |
| | | | | | | | $\sigma_X$ ≒ 1.71 |

(2) 本問の $\sigma_X$=＿1.71＿は，前問の $s_X$≒＿1.9＿に近い値になっている．実は，前問における確率変数 $X$ の標本は，本問の確率変数 $X$ の確率分布にしたがって生起したデータであった．したがって，【近い値，まったく異なる値】になるのは当然のことである．もちろん，ばらつきをもって生起するのであるから，【近い値，完全に一致しない】のも当然のことである．

**[要点29]** 確率変数 $x$ のばらつきの大きさ（正確には，ばらつきの大きさの 2 乗）を表す**分散**(variance)，$\sigma_X{}^2$ は，次式で求められる．

$$\sigma_X{}^2=E\,[(X-\mu_X)^2]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2P(x_i)$$

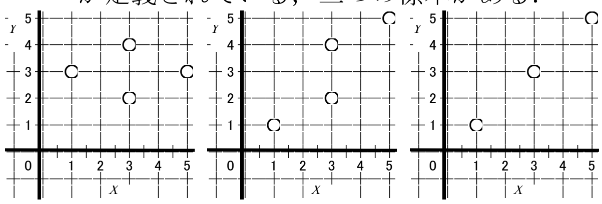
問42　確率変数 $X$ に関して求められる標本分散 $s_X{}^2$ と分散 $\sigma_X{}^2$ とは，どこが違うのだろうか? 標本分散 $s_X{}^2$ は，実際に生起したデータ（標本）から求められる．したがって，個数としては同じ 1 セット 10 個のデータからでも，セットごとに標本分散 $s_X{}^2$ は【変動する，変動しない】．一方，分散 $\sigma_X{}^2$ は，各事象の値と確率が与えられれば，

年　　　月　　　日　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　学年＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿

【変動する，変動しない】．抽象的であるが，思い切って表現すると，標本分散 $s_X{}^2$ は【現実世界，理想世界】を反映し，分散 $\sigma_X{}^2$ は【現実世界，理想世界】を反映する．さらに抽象的な言い方であるが，分散 $\sigma_X{}^2$ は【統計的確率，数学的確率】に類似し，標本分散 $s_X{}^2$ は【統計的確率，数学的確率】に類似した概念である（2.2.2 参照）．

### 3.4.2 共分散

問43　確率変数 $X$ と $Y$ の組$[x_i\ y_j]$として個々のデータが定義されている，三つの標本がある．



(a)　　　(b)　　　(c)

(1) 標本(a)は分布が【ばらつきなく右下がり，ばらつきながら右下がり，正立，ばらつきながら右上がり，ばらつきなく右上がり】している．標本(b)は分布が【ばらつきなく右下がり，ばらつきながら右下がり，正立，ばらつきながら右上がり，ばらつきなく右上がり】している．標本(c)は分布が【ばらつきなく右下がり，ばらつきながら右下がり，正立，ばらつきながら右上がり，ばらつきなく右上がり】している．

(2) 標本平均$\bar{X}$，$\bar{Y}$を求めよ．

(a)

$\bar{X}$ =3.0

$\bar{Y}$ =3.0

(b)

$\bar{X}$ =3.0

$\bar{Y}$ =3.0

(c)

$\bar{X}$ =3.0

$\bar{Y}$ =3.0

(3) $X$，$Y$について，各データ $x_i$ の標本平均$\bar{X}$からの差（$x_i-\bar{X}$）など，下表を埋めよ．ただし，$s_{XY}$ は，$(x_i-\bar{X})(y_j-\bar{Y})$の総和を$(n\text{-}1)$で除した（割った）ものである．

(a)

| 回数 $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 総和 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 3 | 3 | 5 | | |
| $(x_i-\bar{X})$ | -2 | 0 | 0 | 2 | 0 | |
| $(x_i-\bar{X})^2$ | 4 | 0 | 0 | 4 | 8 | $s_X{}^2 \fallingdotseq 2.67$ |
| $y_j$ | 3 | 4 | 2 | 3 | | |
| $(y_j-\bar{Y})$ | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | |
| $(y_j-\bar{Y})^2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | $s_Y{}^2 \fallingdotseq 0.67$ |
| $(x_i-\bar{X})(y_j-\bar{Y})$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $s_{XY}=0$ |

(b)

| 回数 $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 総和 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 3 | 3 | 5 | | |
| $(x_i-\bar{X})$ | -2 | 0 | 0 | 2 | 0 | |
| $(x_i-\bar{X})^2$ | 4 | 0 | 0 | 4 | 8 | $s_X{}^2 \fallingdotseq 2.67$ |
| $y_j$ | 1 | 2 | 4 | 5 | | |
| $(y_j-\bar{Y})$ | -2 | -1 | 1 | 2 | 0 | |
| $(y_j-\bar{Y})^2$ | 4 | 1 | 1 | 4 | 10 | $s_Y{}^2 \fallingdotseq 3.33$ |
| $(x_i-\bar{X})(y_j-\bar{Y})$ | 4 | 0 | 0 | 4 | 8 | $s_{XY} \fallingdotseq 2.67$ |

(c)

| 回数 $i$ | 1 | 2 | 3 | 総和 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 3 | 5 | | |
| $(x_i-\bar{X})$ | -2 | 0 | 2 | 0 | |
| $(x_i-\bar{X})^2$ | 4 | 0 | 4 | 8 | $s_X{}^2=4$ |
| $y_j$ | 1 | 3 | 5 | | |
| $(y_j-\bar{Y})$ | -2 | 0 | 2 | 0 | |
| $(y_j-\bar{Y})^2$ | 4 | 0 | 4 | 8 | $s_Y{}^2=4$ |
| $(x_i-\bar{X})(y_j-\bar{Y})$ | 4 | 0 | 4 | 8 | $s_{XY}=4$ |

**[要点30]** 標本のデータが，2 変量の組$(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, …，$(x_n, y_n)$として得られたとすれば，これらの標本から，確率変数 $x$ と $y$ のばらつきの相互関係（**相関**という）の大きさを反映する物差しとして**標本共分散**は，次式で求められる．

$$s_{XY}=\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})(y_i-\bar{Y})\}/(n\text{-}1)$$

**[要点31]** 上問のように，分布が正立している(a)の場合には $s_{XY}$ は【負，0，正】となる．右上がりの傾向がある(b)や(c)の場合，すなわち $X$ が増加したとき $Y$ も【変わらない，増加する，減少する】傾向がある場合，$s_{XY}$ は【負，0，正】となる．特に，ばらつきなく右上がりになっている(c)の場合，つまり一直線上に分布している場合，すなわち $Y$ が $X$ に【関わらず，比例して，反比例して】増加する場合には，$s_{XY}$ の絶対値$|s_{XY}|$について，$|s_{XY}|$【＜，＝，＞】$s_X\ s_Y$ が成り立つ．それ以外，すなわり一直線上に分布していない場合には，$|s_{XY}|$【＜，＝，＞】$s_X\,s_Y$ である．

### 1.3 順列

**[要点32]** 異なる $n$ 個から $r$ 個を取り出して 1 列に並べる順列の数は，${}_nP_r = n\,(n\text{-}1)\,(n\text{-}2)\cdots\cdots(n\text{-}r\text{+}1)$

問44　0,1,2,3 の数字を使い，3 桁の数字を何通り作ることができるか？

(1) 反復を許す場合（0 が先頭に来てもよい）

4×4×4＝64

(2) 反復を許さない場合（0 が先頭に来てもよい）

(4)･(4-1)･(4-2)＝24

(3) 0 が先頭に来ることなく，反復を許す場合

(4-1)×4×4＝48

(4) 0 が先頭に来ることなく，反復を許さない場合

(4-1)×3×2＝18

**[要点33]** 異なる $n$ 個のものから $r$ 個を取る組み合わ

せの数は,

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r\,!} = \frac{{}_nP_r}{{}_rP_r}$$

問45　コインを 8 回投げた．その表裏の出方について答えよ．

(1) 同じ“表”でも，何回目に出たかによって，場合としては異なると考える．このとき，すべての場合の数 $N$ はいくつか？

$N=2^8=256$

(2) “表”が 1 回出る場合の数はいくつか？　[ヒント]　もし，“表”が“3”回目に出たなら，“1”から“8”まで用意してある札のうち，“3”の札が引かれたと考えよう．また，もし，“表”が“8”回目に出たなら，“8”の札が引かれたと考えよう．とすると，これは，“1”から“8”までの八枚の札の束から，一枚を抜き取る場合の数となる．

${}_nC_r={}_8C_1={}_8P_1/{}_1P_1=8/1=8$

(3) “表”が 2 回出る場合の数はいくつか？[ヒント]もし，“表”が“3”回目と“8”回目に出たなら，“3”と“8”の札が引かれたと考えよう．“3”“8”も，“8”“3”のような順番の違いは問わないので，・・・

${}_nC_r={}_8C_2={}_8P_2/{}_2P_1=8・7/(2・1)=28$

(4) 上問をふまえ，${}_8C_0$ の意味するところを述べよ．

“表”が 0 回出る場合，つまり“表”が 1 回も出ない場合の数

(5) 下表を埋めよ．分数は約分の必要なし．ただし，${}_8P_0=1$，${}_0P_0=1$

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ${}_nC_r$ | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |
| $\dfrac{{}_nC_r}{N}$ | $\dfrac{1}{256}$ | $\dfrac{8}{256}$ | $\dfrac{28}{256}$ | $\dfrac{56}{256}$ | $\dfrac{70}{256}$ | $\dfrac{56}{256}$ | $\dfrac{28}{256}$ | $\dfrac{8}{256}$ | $\dfrac{1}{256}$ |

${}_8C_0$ から ${}_8C_8$ まで，すべてを加算すると，$N$ になることを確認せよ．したがって，${}_8C_0/N$ から ${}_8C_8/N$ まですべてを加算すると，1＿＿になる．

# 4. 基本的な確率分布

## 4.1 二項分布

問46　1 円玉，5 円玉，10 円玉，100 円玉というように，$n$=4 種類のコインを用意せよ．それらを投げて，裏(“0”と書け)，表(“1”と書け)の出るパターンについて以下の問に答えよ．

(1) 表を埋めよ．

第 1 セット

| 回 | 1 円玉 | 5 円玉 | 10 円玉 | 100 円玉 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |

| 表の枚数 | 0 枚 | 1 枚 | 2 枚 | 3 枚 | 4 枚 |
|---|---|---|---|---|---|
| 当該の事象の起こった回数 $s$ | | | | | |
| 試行の回数 $S$ | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 統計的確率 $s/S$ | | | | | |

第 2 セット

| 回 | 1 円玉 | 5 円玉 | 10 円玉 | 100 円玉 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |

| 表の枚数 | 0 枚 | 1 枚 | 2 枚 | 3 枚 | 4 枚 |
|---|---|---|---|---|---|
| 当該の事象の起こった回数 $s$ | | | | | |
| 試行の回数 $S$ | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 統計的確率 $s/S$ | | | | | |

第 3 セット

| 回 | 1 円玉 | 5 円玉 | 10 円玉 | 100 円玉 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |

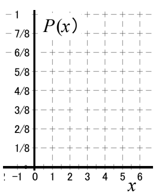
| 表の枚数 | 0 枚 | 1 枚 | 2 枚 | 3 枚 | 4 枚 |
|---|---|---|---|---|---|
| 当該の事象の起こった回数 $s$ | | | | | |
| 試行の回数 $S$ | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 統計的確率 $s/S$ | | | | | |

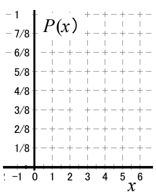
第 4 セット

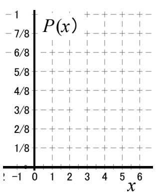
| 回 | 1 円玉 | 5 円玉 | 10 円玉 | 100 円玉 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |

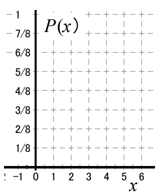
| 表の枚数 | 0 枚 | 1 枚 | 2 枚 | 3 枚 | 4 枚 |
|---|---|---|---|---|---|
| 当該の事象の起こった回数 $s$ | | | | | |
| 試行の回数 $S$ | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 統計的確率 $s/S$ | | | | | |

(2) 統計的確率の分布を下図に描け．







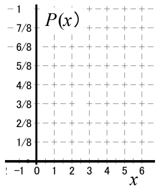


年　　月　　日　学籍番号＿＿＿＿＿＿　学年＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿

第 1 セット　第 2 セット　第 3 セット　第 4 セット

(3) 上記の第 1 セットから第 4 セットまでの総計について以下を求めよ．

| 表の枚数 | 0 枚 | 1 枚 | 2 枚 | 3 枚 | 4 枚 |
|---|---|---|---|---|---|
| 当該の事象の起こった回数 $S$ | | | | | |
| 試行の回数 $S$ | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 |
| 統計的確率 $s/S$ | | | | | |



(4) 下表を埋めよ．分数は約分の必要なし．ただし，${}_4P_0=1$，${}_0P_0=1$．$N={}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| ${}_4C_x$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |
| ${}_4C_x / N$ | 1/16 | 4/16 | 6/16 | 4/16 | 1/16 |

(5) 大数＿＿の法則により，$n$ を大きくするほど，問(3)の【統計的確率，数学的確率】$s/n$ は，全体として，問(4)の【統計的確率，数学的確率】に近づいていく．

問47

(1) “表”の出る確率を $p$ とする．この $p$ を用いると，“裏”の出る確率 $q$ は 1- $p$＿＿となる．例えば，4 枚の出方が，“裏”，“表”，“裏”，“裏”であったとする．このときには，各コインの表裏の出方は互いに影響を及ぼ【さない，す】．すなわち，試行は互いに独立で【ある，ない】．したがって，【乗法，加法】法則が成り立ち，“裏”，“表”，“裏”，“裏”なる結合事象の生起する確率は，$p$ と $q$ を用いると，$p^1 q^3$＿＿となる．

(2) 前小問(1)では，2 回目に“表”が一枚出た．4 回の内，1 回だけが“表”が出る場合としては，2 回目以外に，1 回目，3＿回目，4＿回目に“表”が出る場合がある．したがって，そのパターンは 4＿通りある．よって，各パターンの生起確率の総和は，$4p^1 q^3$＿＿となる．

(3) 特に，“表”，“裏”の出方に，偏りのない場合には，$p=q=$1/2＿＿となる．このときには，“表”が一枚出るパターン，すべての生起確率は，4/16 となり，これは．上表の ${}_4C_1$ /$N$ に一致【する，しない】．

**[要点34]** “表”，“裏”の二つに一つの事象が起こる試行を $n$ 回結合させた事象について，一方の起こる回数を確率変数として求めた分布を**二項分布**という．

問48　“表”，“裏”の出方に偏りがなく，$p$=0.5 とする．

(1) $n$=4 である，前々問の(3)に基づいて，標本平均と標本分散を計算せよ．

| 表の枚数 | 0 枚 | 1 枚 | 2 枚 | 3 枚 | 4 枚 |
|---|---|---|---|---|---|
| 当該の事象の起こった回数 $s$ | もし，4 ならば | もし，10 ならば | もし，12 ならば | もし，6 ならば | もし，0 ならば |
| 試行の回数 $S$ | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 |
| 統計的確率 $s/S$ | 4/32 | 10/32 | 12/32 | 6/32 | 0/32 |

もし，4，10，12，6，0 ならば，

標本平均＝0×4/32+1×10/32+2×12/32+3×6/32+4×0/32=52/32=13/8

標本分散＝$(0\text{-}13/8)^2$×4/31+$(1\text{-}13/8)^2$×10/31+$(2\text{-}13/8)^2$×12/31+$(3\text{-}13/8)^2$×6/32+$(4\text{-}13/8)^2$×0/31＝・・・

(2) 前々問の(4)に基づいて，平均と分散を計算せよ．

$\mu_X$= 0･(1/16)+1･(4/16)+2･(6/16)+3･(4/16)+4･(1/16)=2

$\sigma_X^2$= $(0\text{-}2)^2$･(1/16) ＋ $(1\text{-}2)^2$･(4/16) ＋ $(2\text{-}2)^2$･(6/16) ＋ $(3\text{-}2)^2$･(4/16)＋$(4\text{-}2)^2$･(1/16)　=1

(3) $np$ は 4×0.5=2＿＿であり，これは $\mu_X$＿＿に一致する．$npq$ は 4×0.5×0.5=1＿＿であり，これは $\sigma_X^2$＿＿に一致する．

問49　二項分布に従う確率変数を 3 つあげよ．

男女 4 人の内の男子の人数

ある野球チームの 4 試合の勝数

学生 4 人の内の遅刻した学生の人数

**[要点35]** 二項分布に従う確率変数 $X$ の平均 $\mu_X$，分散 $\sigma_X^2$ は，それぞれ

$\mu_X = np$

$\sigma_X{}^2 = npq$

**[要点36]** 例えば，-1≦$x$≦1 の確率密度関数の面積は，-1≦$x$≦1 の範囲に $x$ が生起する確率を表す．

**[要点37]** 例えば，-∞≦$x$≦∞の確率密度関数の面積は 1 となる．

## 3.5 連続型確率変数の分布関数

**[要点38]** ある範囲のすべての実数が生起しうる確率変数のことを，**連続型確率変数**という．

問50

(1) サイコロを振って出た目，1，2，3，4，5，6 を値としてとる確率変数は，【離散型確率変数，連続型確率変数】である．

(2) コインを投げて出た裏，表，をそれぞれ値 0，1 をとる確率変数は，【離散型確率変数，連続型確率変数】である．

(3) 値 0.1，0.2，0.3 をとる確率変数は，【離散型確率変数，連続型確率変数】である．

(4) 0 以上かつ 1 以下の値をとる確率変数は，【離散型確率変数，連続型確率変数】である．

(5) 0.1 以上かつ 0.2 以下，0.3 以上かつ 1.2 以下，の値をとる確率変数は，【離散型確率変数，連続型確率変数】である．

(6) 1cm 単位で測定した，諸君の身長を値としてとる確率変数は，【離散型確率変数，連続型確率変数】である．

(7) 0.01cm 単位で測定した，諸君の身長を値として

とる確率変数は，【離散型確率変数，連続型確率変数】である．

(8) 諸君の身長そのものは，決して 1cm 単位，あるいは 0.01cm 単位で伸びるわけではない．無限に細かい単位で伸びているだろう．その意味で，諸君の身長そのものを値としてとる確率変数は，【離散型確率変数，連続型確率変数】である．

(9) 無限に細かく測定できる器械は存在しないので，（測定値のように）実際に生起した値を【離散型確率変数，連続型確率変数】と見るのは，無理がある．しかし，実際に生起した値（測定した値）は 1cm 単位であろうとも，0.01cm 単位であろうとも，数学的に（確率的に）その確率変数を扱う場合には，連続型確率変数と考えることが多い．“身長”の例のように，身長の実体が【離散型確率変数，連続型確率変数】であることも一つの理由である．その他，連続型確率変数の方が簡単な数式として確率関数が定義できる利点，それから誘導される平均や分散などが理論的に計算できる利点などが理由である．

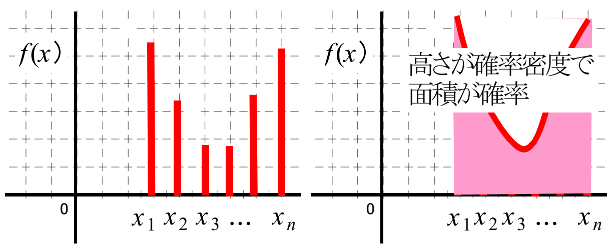
$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$は$\sum_{x_1}^{x_n} f(x_i)$と同じものを表す．

**[要点39]**離散と連続の対応：

離散関数の和$\sum_{x_1}^{x_n} f(x_i)$は，$x_i$の下限$x_1$から始まり，$x_2$，$x_3$，…を経て，上限$x_n$まで，それぞれに対応する関数値$f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$を加算する計算である．

連続関数の積分$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx$は，$x_i$の下限$x_1$から上限$x_n$まで，$x$に対応して連続的に変化する関数値$f(x)$で定められる曲線と，$x$軸とで囲まれた面積を求める計算である．

このような$\sum_{x_1}^{x_n} f(x_i)$と$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx$との対応に注意せよ．例えば，$\sum_i x_i P(x_i)$と$\int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx$が対応する．

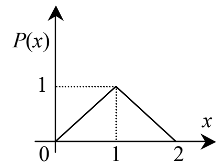



**[要点40]**連続型確率変数 $X$ の区間 $a\leqq X\leqq b$ の面積，すなわち$\int_a^b f(x)dx$ が，$a\leqq X\leqq b$ に生起する確率 $P(a\leqq X\leqq b)$ になるような関数 $f(x)$を**確率密度関数**という．また，その関数の値$f(x)$を**確率密度**という．すなわち，$f(x)$を確率密度とすると，区間 $a\leqq X\leqq b$ に生起する確率 $P(a\leqq X\leqq b) = \int_a^b f(x)dx$

ただし，以下では確率密度として $f(\ )$は用いず，確率を表すときと同様に $P(\ )$を用いることがあるので注意してほしい．すなわち

**[要点41]**$P(a\leqq X\leqq b) = \int_a^b f(x)dx$ と書く代わりに，$P(a\leqq X\leqq b) = \int_a^b P(x)dx$ と書くことがある．このとき，左辺の $P(\ )$は確率，右辺の $P(\ )$は確率密度である．

問51　下図の確率密度関数（**三角分布**という）をもつ，連続型確率変数について，以下を求めよ．




(1) $P(0\leqq X\leqq 2)$ =1

(2) $P(-1\leqq X\leqq 10)$ =1

(3) $P(1\leqq X\leqq 10)$ =0.5

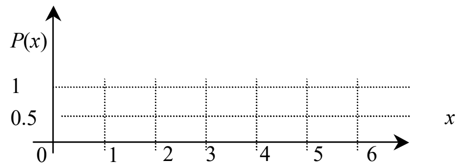
(4) $P(0\leqq X\leqq 0.5)$ =1/8

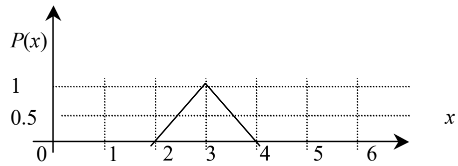
(5) $P(0.5\leqq X\leqq 1)$ =3/8

**[要点42]**すべての事象の確率の総和は 1 である．したがって，$P(-\infty\leqq X\leqq\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx = 1$

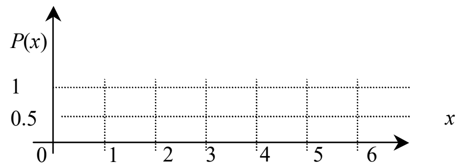
問52　左右対称の三角分布について考える．

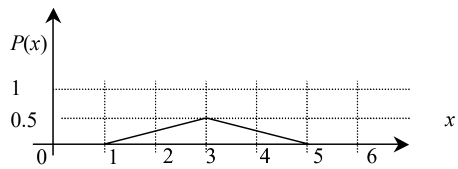
(1) 確率密度をもつ変域が 1 以上かつ 5 以下であるような連続型確率密度関数を図示せよ．



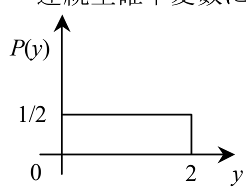




(2) 平均を変えずに，幅を 2 倍にしたら，分布はどうなるのだろうか？[ヒント]　面積が 1 という条件に注意して，高さを求めよ．




問53　下図の確率密度関数（**一様分布**という）をもつ，連続型確率変数について，以下を求めよ．




(1) $P(0\leqq X\leqq 2)$ =1

年　　月　　日　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　学年＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

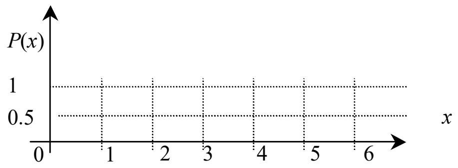
(2) $P(-1 \leqq X \leqq 10) =$ 1

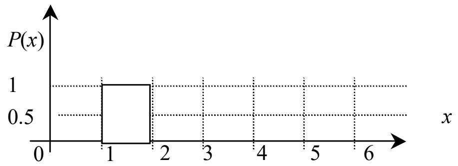
(3) $P(1 \leqq X \leqq 10) =$ 0.5

(4) $P(0 \leqq X \leqq 0.5) =$ 1/4

(5) $P(0.5 \leqq X \leqq 1) =$ 1/4

問54　一様分布で，確率密度をもつ変域が 1 以上かつ 2 以下であるような一様分布を図示せよ．



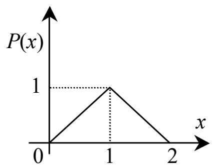

## 3.6 連続型確率変数の平均

**[要点43]**連続型確率変数 $X$ の平均，つまり $X$ の期待値は，

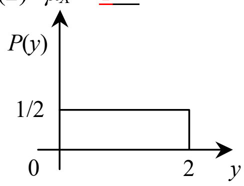
$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx \quad \text{←対応注意→} \quad \sum_i x_i P(x_i)$$

問55　下図の三角分布と一様分布について，平均を求めよ．

(1) $\mu_X =$ 1




(2) $\mu_X =$ 1




## 3.7 連続型確率変数の分散

**[要点44]**連続型確率変数 $X$ の分散，つまり $(X-\mu_X)^2$ の期待値は，

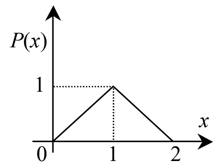
$$\sigma_X{}^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2 P(x)dx$$

$$\text{←対応注意→} \quad \sum_i (x_i - \mu_X)^2 P_X(x_i)$$

問56　下図の三角分布と一様分布について，分散 $\sigma_X{}^2$，およびその平方根である標準偏差 $\sigma_X$ を求めよ．ただし，$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.4$，$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.7$．小数点以下 2 桁まで．

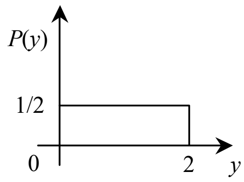
(1) $\sigma_X{}^2 = \int_0^1 (x-1)^2 x dx + \int_1^2 (x-1)^2(-x+2)dx =$ 1/6≒0.17

$\sigma_X$ ≒1.4・1.7 / 6＝0.40(有効数字の桁数，有理化などの計算法により 0.42 や 0.41 になる)




(2) $\sigma_Y{}^2 =$ 1/3≒0.33

$\sigma_Y$ ≒ $1/\sqrt{3}$≒0.59




(3) 上の問(1)と問(2)で求めた $\sigma_X$ を比較検討しよう．ここでの三角分布と一様分布は，ともに確率変数の変域は【等しい，異なる】．一方，三角分布の標準偏差は，一様分布より【小さい，大きい】．“分散，あるいは標準偏差”は，ばらつきの大きさを直接的に反映する物差し（統計用語では測度）であったが，今回の結果をみてわかるように，それは，変域で決まるもの【である．ではない】．“分散，あるいは標準偏差”は，ばらつきを全体としてとらえたものであって，中心に集中している三角分布の方が，全体に満遍なく分布している一様分布より【小さい，大きい】値となるのは当然の帰結である．

## 4.3 正規分布

**[要点45]正規分布** (normal distribution): 連続型確率変数 $X$ に対して，確率密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

で定められる分布を正規分布という．その平均は $\mu_X$，分散は $\sigma_X^2$ である．そのことを陽に（明示的に）示したいとき，確率密度関数を $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ のように書く．

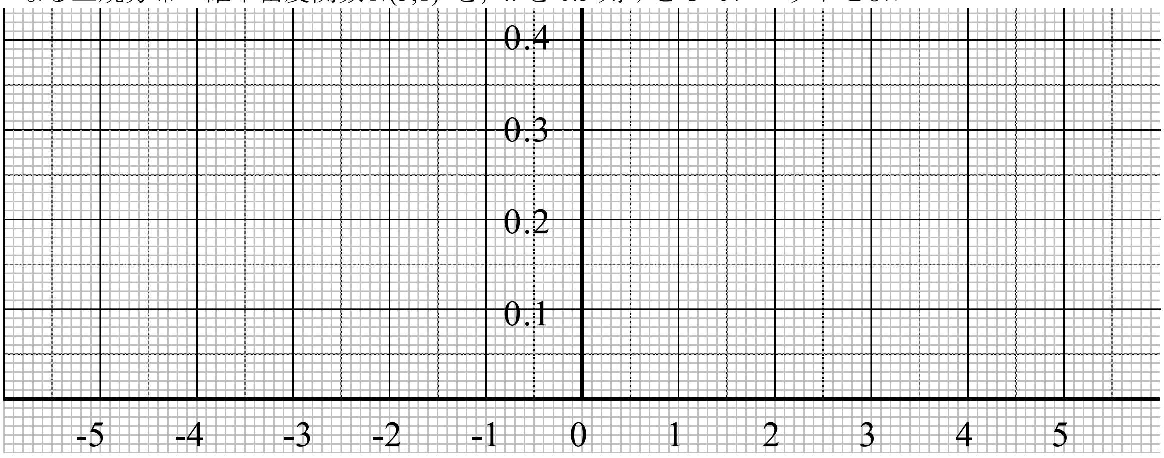
**[要点46]** $\mu_X = 0$，$\sigma_X^2 = 1$，すなわち $N(0, 1)$ の確率密度関数，すなわち $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ に従う分布は**標準正規分布**とよばれる．

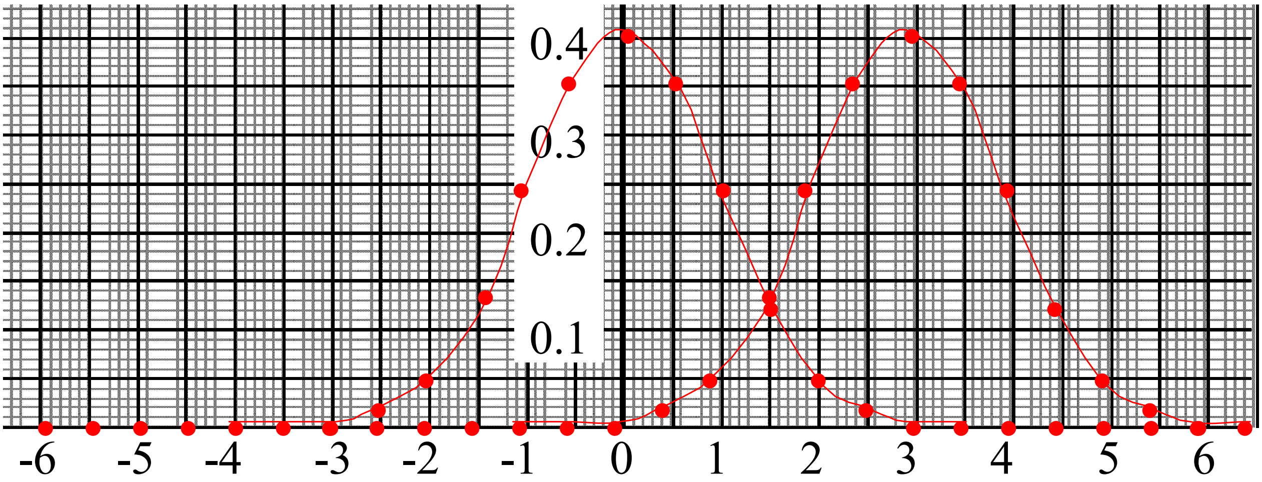
問57

(1) 下表の値を用いて，平均 $\mu_X = 0$，分散 $\sigma_X^2 = 1$（よって $\sigma_X = 1$）なる正規分布，すなわち標準正規分布の確率

年　　月　　日　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　学年＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

密度関数 $N(0,1)$ を，$x$ を 0.5 刻みとしてプロット（作図）せよ．次に，平均 $\mu_X=3$，分散 $\sigma_X^2=1$（よって $\sigma_X=1$）なる正規分布の確率密度関数 $N(3,1)$ を，$x$ を 0.5 刻みとしてプロットせよ．



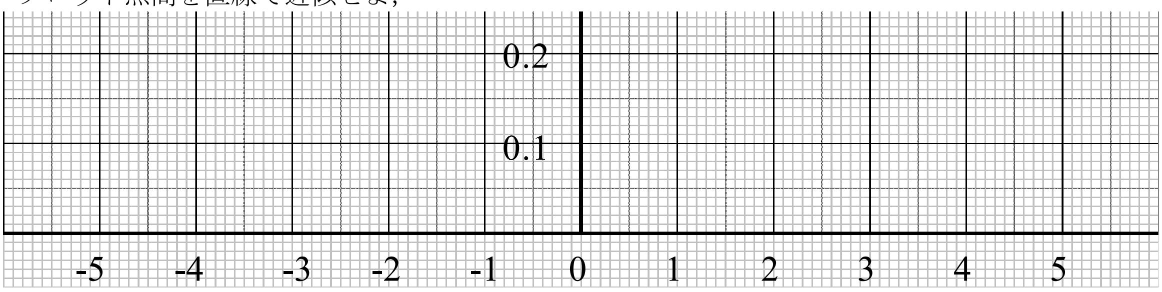



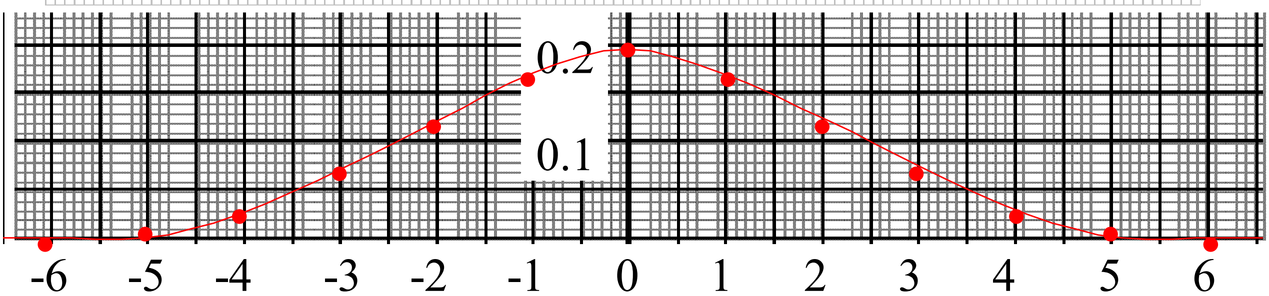

(2) $N(0,1)$と $N(3,1)$を比較する．$N(3,1)$は $N(0,1)$に比べて，$x$ 軸上の正の方向に＿3＿だけ並進移動している．

［ヒント］ 下表の使用法．$x=1$ のときに $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,2}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2^2}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{1^2}{2^2}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.125}$ である．よって，下表の $z=0.125$ に対応する値 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z)=0.35$ を 1/2 倍して 0.175 を得る．

| $z$ | 0.000 | 0.125 | 0.500 | 1.125 | 2.000 | 3.125 | 4.500 | 6.125 | 8.000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z)$ | 0.40 | 0.35 | 0.24 | 0.13 | 0.05 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |

(3) 平均 $\mu_X=0$，分散 $\sigma_X^2=4$（よって $\sigma_X=2$）なる正規分布の確率密度関数 $N(0,4)$を，$x$ を 1 刻みとしてプロットせよ． プロットした点は，本来，滑らかな曲線で結ばなければならないが，本問では，簡単のため，各プロット点間を直線で近似せよ，



年　月　日　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　学年＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

(4) $N(0,1)$と $N(0,4)$を比較する．$N(0,4)$は $N(0,1)$に比べて，幅が 2 倍に，高さは 1/2 倍にスケール変化している．この倍率は，$N(0,4)$の標準偏差 2 と $N(0,1)$ の標準偏差 1 との比率に等しい．

(5) $N(0,1)$について，以下の確率を求めよ．ただし，確率を求めるには，確率密度関数を積分しなければならない．正規分布関数は解析的に積分することはできないので，数表を用いる必要がある．教科書の巻末の数表を利用せよ．

$-1 \leqq x \leqq 1$ の確率 0.68 ←面積が確率になる

$-2 \leqq x \leqq 2$ の確率 0.95

$-3 \leqq x \leqq 3$ の確率 0.997

(6) $N(3,1)$について，以下の面積を求めよ．

$2 \leqq x \leqq 4$ の確率 0.68

$1 \leqq x \leqq 5$ の確率 0.95

$0 \leqq x \leqq 6$ の確率 0.997

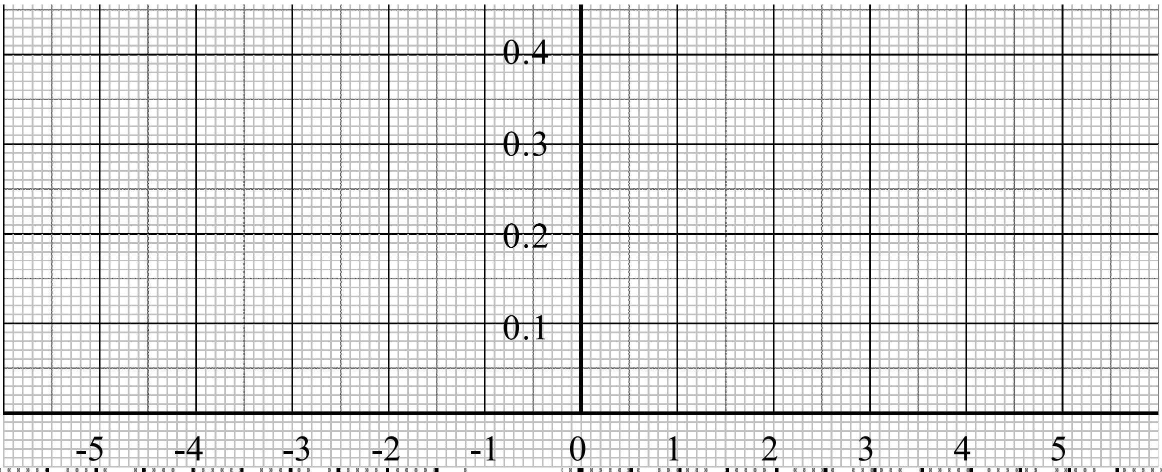
以上の結果をまとめると，

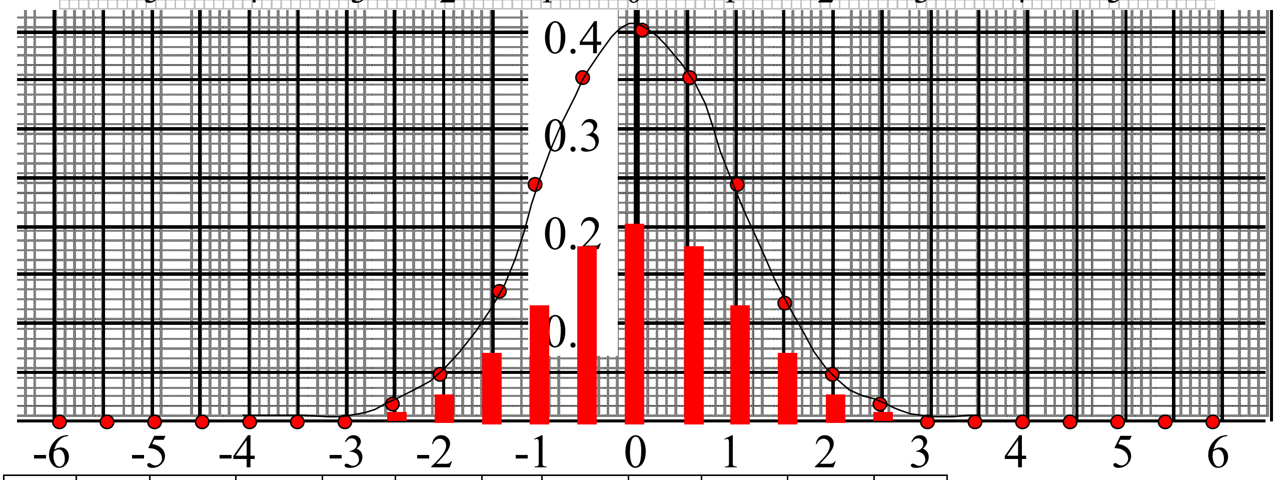
“平均”－ “標準偏差”≦$x$≦“平均”＋ “標準偏差” の確率 →0.68268

“平均”－2 ×“標準偏差”≦$x$≦“平均＋2 ×“標準偏差” の確率 →0.95450

“平均”－3 ×“標準偏差”≦$x$≦“平均＋3 ×“標準偏差” の確率 →0.99730

(7) $N(0,1)$について考える．これは確率密度関数であった．我々が直感的に理解しやすいのは，“ある値をとる確率が 0.25 である”というように離散型である．そこで，$x$ を 0.5 刻みでプロット（作図）した問題を例にとり，連続型確率密度関数を離散型確率関数に近似しよう．つまり，$x$ = -6，-5.5，-5，-4.5，…，-0.5，0，0.5，1.0…というように，$x$ が 0.5 刻みでのみ生起する問題に変換してみよう．まず，対象の確率密度関数は変化している．しかし．例えば $x$ = -0.5 というような，特定の $x$ の近傍の確率密度は，$x$ = -0.5 のときの確率密度 0.35 とさほど変わっていないと考えられる．そこで，一つの近似として，$x$ = -0.5 を挟んだ区間，具体的には $x$ を 0.5 刻みで標本化しているので，$x$ = -0.75～-0.25 の区間の確率密度は，$x$ = -0.5 のときの確率密度 0.35 に等しい（一定ということ!!!）と考えるのである．とすれば，$x$ = -0.5 で生起する確率として，「$x$ = -0.75～-0.25 の区間の面積」＝「高さ 0.35」×「幅 0.5」=0.175 が得られることがわかる．同様にして，$x$ = -6，-5.5，-5，-4.5，…，-0.5，0，0.5，1.0…に対する確率を求め，図示せよ．また，下表を埋めよ．




| $x$ | -2.5 | -2.0 | -1.5 | -1 | -0.5 | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | 0.01 | 0.025 | 0.065 | 0.12 | 0.175 | 0.2 | 0.175 | 0.12 | 0.065 | 0.025 | 0.01 |

(8) $x$ の刻みを-2，-1，0，1，2 とし，離散型確率関数を求め，下表を埋めよ．このように，確率密度の値は．概ね 1 刻みでの確率になることは，確率密度を実感する上で役に立つので，よく覚えておくとよい．次に，この確率関数を用いて，分散を計算すると，0.88 となる．連続型の分

散は 1 であったので，少しずれている．平均はもちろん 0 となる．

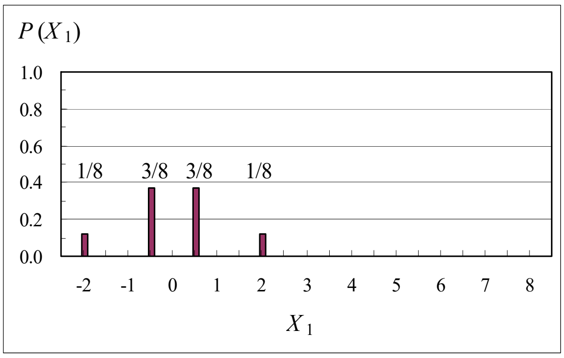
| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | 0.05 | 0.24 | 0.40 | 0.24 | 0.05 |

なお，このように，本来は $P(x)$の総和は 0.98 となる．確率であるから総和は 1 なっていなければならないのに，少しずれてしまうのは，**丸め誤差**によるという．

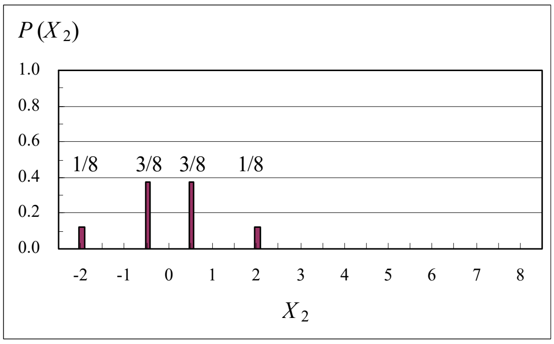
## 4.4 カイ２乗分布

問58 簡単な離散型確率関数を用いて，“複数の確率変数を組み合わせて生成される確率変数”について考えよう．

(1) 下図に示す二つの確率変数 $X_1$, $X_2$ を考える．下表を埋めよ．

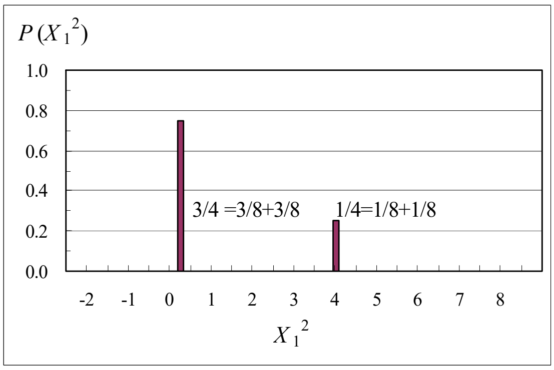



| $X_1$ | -2.0 | -0.5 | 0.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X_1)$ | 0.125 | 0.375 | 0.375 | 0.125 |

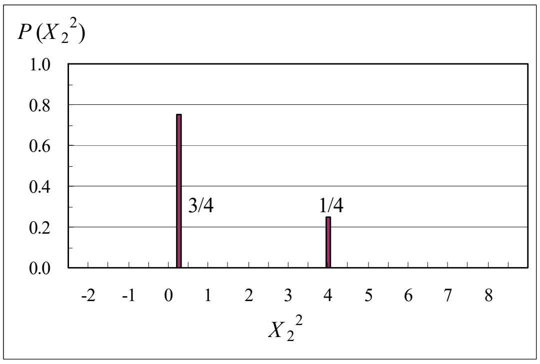



| $X_2$ | -2.0 | -0.5 | 0.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X_2)$ | 0.125 | 0.375 | 0.375 | 0.125 |

(2) $X_1$，$X_2$，それぞれの２乗により定義された確率変数 $X_1^2$，$X_2^2$ を考えよ．下表を埋めよ．ここでは，例えば，$X_1$= - 0.5 も $X_1$= 0.5 も，いずれも２乗すれば 0.25 となり，値は等しい．すなわち，確率変数 $X_1^2$=0.25 としては，$X_1$= - 0.5 と $X_1$= 0.5 の両方が対応する．したがって，その確率は，$X_1$= - 0.5 と $X_1$= 0.5 の両方の確率の和 3/8+3/8＝3/4 となる．




| $X_1^2$ | | | 0.25 | 4.0 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X_1^2)$ | | | 0.75 | 0.25 |



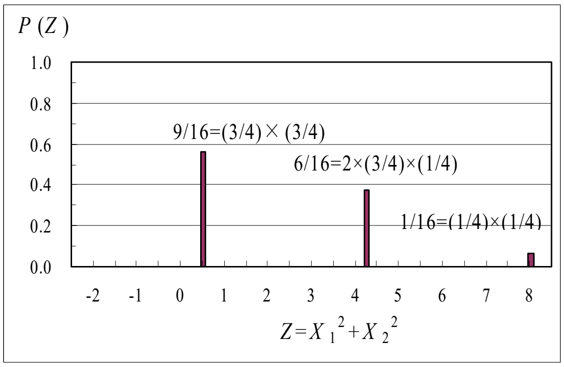

| $X_2^2$ | | 0.25 | 4.0 |
|---|---|---|---|
| $P(X_2^2)$ | | 0.75 | 0.25 |

(3) $X_1^2$，$X_2^2$ の和，すなわち $X_1^2+X_2^2$ により定義された確率変数 $Z$ を考える．下表を埋めよ．これは２段階で考えなければならない．第一段階として，$X_1^2$，$X_2^2$ それぞれの組み合わせによる結合事象を考えよう．例えば，$X_1^2$= 0.25，$X_2^2$= 4.00 のときには，$X_1^2+X_2^2$= 4.25 となる．その確率は，$X_1^2$= 0.25，$X_2^2$= 4.00 が互いに独立であることから乗法法則が成り立つので，$P(X_1^2=0.25)\times P(X_1^2=4.00)$＝0.75×0.25＝3/16＝0.19 となる．このようにして下表が埋められる．

| | | $X_1^2$ | 0.25 | 4.00 |
|---|---|---|---|---|
| | | $P(X_1^2)$ | 0.75 | 0.25 |
| $X_2^2$ | $P(X_2^2)$ | | | |
| 0.25 | 0.75 | | 0.50(=0.25+0.25)<br>0.56(=0.75×0.75) | 4.25(=4.00+0.25)<br>0.19(=0.25×0.75) |
| 4 | 0.25 | | $Z=X_1^2+X_2^2$<br>4.25<br>$P(Z)=P(X_1^2)\times P(X_1^2)$<br>0.19 | 8.00<br>0.06 |

第二段階である．上表のように，$X_1^2+X_2^2$ の値は，0.5，4.25，8 の３種類である．この中で，4.25 については，$X_1^2$= 0.25，$X_2^2$= 4.00 だけでなく，$X_1^2$= 4.00，$X_2^2$= 0.25 の二つの結合事象がこれに対応する．したがって，$X_1^2+X_2^2$=4.25 の確率は 0.19+0.19＝0.38 となる．

年　　月　　日　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　学年＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿



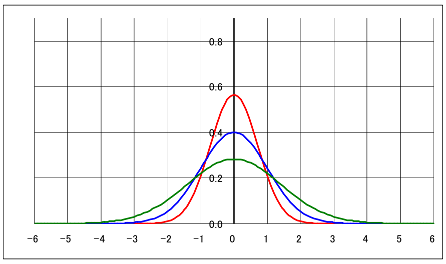

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Z=X_1^2+X_2^2$ | 0.50 | 4.25 | 8.00 |
| $P(Z)=\Sigma P(X_1^2)\times P(X_2^2)$ | 0.56 | 0.38 | 0.06 |

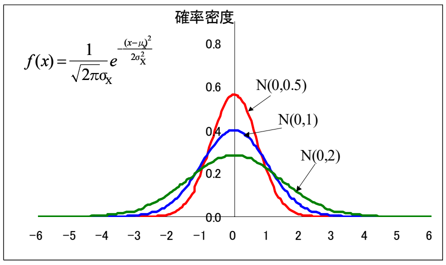
ただし，上式のΣは，当該の $Z$ の値を与える $X_1^2$ と $X_2^2$ のすべての組合せ（例えば，$Z$ =4.25 なら，$X_1^2$=0.25，$X_2^2$=4，あるいは $X_1^2$=4，$X_2^2$=0.25 というように 2 通りの組み合わせが存在する）に対して，$P(X_1^2)\times P(X_2^2)$の値を加算することを意味する．

前問では，簡単な離散型確率関数を用いて，“複数の確率変数を組み合わせて生成される確率変数”について考えた．次は，連続型確率関数，その中でも最も代表的な標準正規分布 $N$(0, 1)を用いて，“複数の確率変数を組み合わせて生成される確率変数”について考えよう．

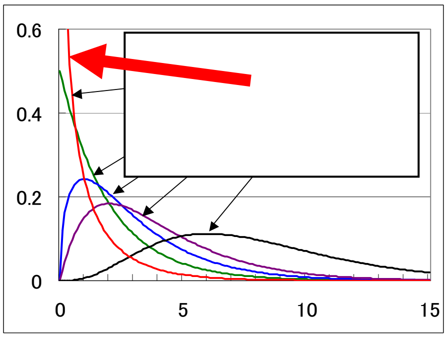
問59

(1) 下図の曲線の中から，標準正規分布 $N$(0, 1)を選べ．



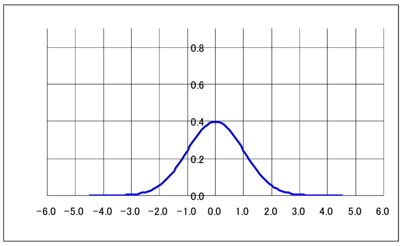




(2) 図 1 の確率密度関数に従う連続型確率変数を $X_1$ と表す．まず，$X_1^2$ は【負，0，正】にならない．さて，$X_1$ は，大半は-3～0～3 の間に生起するので，$X_1^2$ の大半は 0＿～9＿の間に生起する．もちろん，$X_1$ が 1 より小さいときには，$X_1^2$ はより 0 に【近づく，変わらない，遠のく】．そのため，$X_1$ は 0 に近いほど生起し易いが，$X_1^2$ はその傾向が【より強くなる，変わらない，より弱くなる】．特に $X_1$ が微小のときには，0 に集中するため，確率密度は一段と大きくなる．理由は簡単には説明できないが，特に，$X_1^2$ の場合には確率密度は無限大になる．また，逆に，$X_1$ が 1 より大きいときには，$X_1^2$ はより 1 から【近づく，変わらない，遠のく】．そのため，$X_1$ は 1 より大きいほど生起し難くなるが，$X_1^2$ はその傾向が【より強くなる，変わらない，より弱くなる】．このような傾向を考え，$X_1^2$ の分布として適切なものを下図から選べ．




[準備]　$\langle Z\rangle = \langle X+Y^2\rangle = \langle X\rangle + \langle Y\rangle$

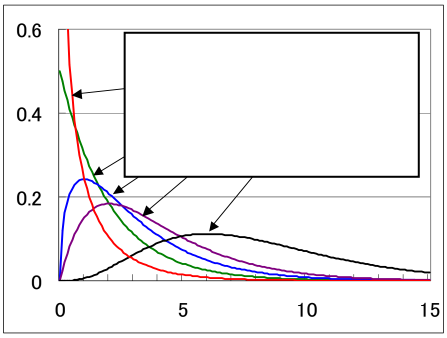
(3) 下図の確率密度関数に従う連続型確率変数として，$X_1$ と $X_2$ を考える．両者は互いに独立である．$Z = X_1^2 + X_2^2$ の平均（期待値）を求めよう．ここで $Z$ を構成する確率変数は $X_1$ と $X_2$ の 2 個であり，その個数 2 は**自由度**とよばれる．もし，$Z = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ であれば，自由度は 3＿となる．さて，標準正規分布は平均が 0 であることから，$Z$ の期待値$\langle Z\rangle$は，$\langle X\rangle = \langle X_1^2 + X_2^2\rangle = \langle X_1^2\rangle + \langle X_2^2\rangle$ = 1＿+1＿=2＿となる．同様に，$Z = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$ の平均は 4＿となる．

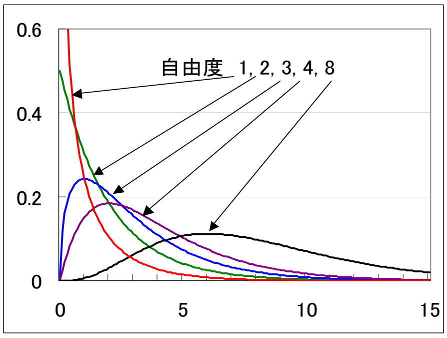



(4) さて，$X_1^2$ の大半は 0＿～9＿の間に生起した．それは $X_2^2$ も同様である．両者は互いに独立であることから，$X_1^2$ が大きいとしても，$X_2^2$ も同様に大きい値になるとは限らない．むしろ，互いに相殺して，【小さな，中間的な，大きな】値になることが多いと推測される．そのため，$X_1^2$ と $X_2^2$ が，左方に偏った分布であっても，$X_1^2 + X_2^2$ は偏りが【小さくなる，変わらない，大きくなる】．

(5) 二つ前の小問から，「平均は，確率変数の個数【より小さい，に等しい，より大きい】．また，前問から，「確率変数の個数が増えると相殺する可能性が【低く，等しく，高く】なって偏りが【小さくなる，変わらない，大きくなる】」．このような傾向を考え，下図の曲線のいずれが，確率変数の個数 1，2，3，4，8 に対応するか，答えよ．

年　　月　　日　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　学年＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿






[参考：難]

$X$ の平均が 0 のとき

$\sigma_X{}^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle (X-0)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle$

$X$ の分散が1なら

$\langle X^2 \rangle = \sigma_X{}^2 = 1$

$\mu_X = \langle X_1^2 + X_2^2 + \text{---} + X_n^2 \rangle = \langle X_1^2 \rangle + \langle X_2^2 \rangle + \cdots + \langle X_n^2 \rangle$

$X_1$，$X_2$，--，$X_n$ の平均が，いずれも 0 のとき

$\mu_X = \langle X_1^2 \rangle + \langle X_2^2 \rangle + \cdots + \langle X_n^2 \rangle = \sigma_{X1}{}^2 + \sigma_{X2}{}^2 \cdots + \sigma_{Xn}{}^2$

$X_1$，$X_2$，--，$X_n$ の分散が，いずれも1なら

$\mu_X = \sigma_{X1}{}^2 + \sigma_{X2}{}^2 \cdots + \sigma_{Xn}{}^2$　$\sigma_X{}^2 = 1+1+\cdots+1 = n$

$\sigma_X{}^2 = 2n$ は，容易には求められない．覚えればよい．

**[要点47]カイ 2 乗分布**($\chi^2$ (chi-square) distribution, )：

自由度 $n$ のカイ 2 乗分布とは？　標準正規分布 $N(0,1)$にしたがう確率変数 $X_1$，$X_2$，---，$X_n$ によって定義される $X = X_1^2 + X_2^2 + \text{---} + X_n^2$ のような確率変数 $X$ がしたがう分布である．その平均と分散は，

$\mu_X = n$

$\sigma_X{}^2 = 2n$

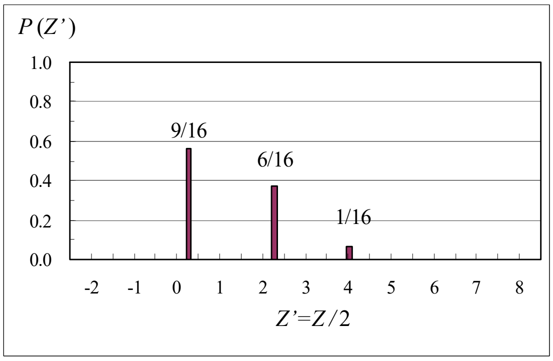
## 4.5 スチューデントの $t$ 分布

問60

(1) 下表の確率変数 $Z = X_1^2 + X_2^2$ を 2 で除した（割った），確率変数 $Z' = Z/2$ を考える．下表を埋めよ．例えば，$Z = 0.5$ のとき，$Z' =$0.5/2=0.25＿となる．その確率は，$Z=0.5$ の確率と一致する．したがって，$P(Z'=$0.25$)=P(Z=0.5)=$0.56＿となる．このようにして下表が埋められる．

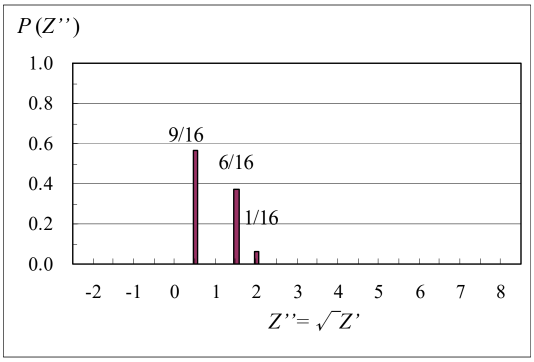
| | | | |
|---|---|---|---|
| $Z = X_1^2 + X_2^2$ | 0.50 | 4.25 | 8.00 |
| $P(Z) = \Sigma P(X_1^2) \times P(X_2^2)$ | 0.56 | 0.38 | 0.06 |

ただし，上式のΣは，当該の $z$ の値を与える $X_1^2$ と $X_2^2$ のすべての組合せ(例えば，$z=4.25$ なら，$X_1^2=0.25$，$X_2^2=4$，あるいは $X_1^2=4$，$X_2^2=0.25$ というように 2 通りの組み合わせが存在する）に対して，$P(X_1^2) \times P(X_2^2)$の値を加算することを意味する．



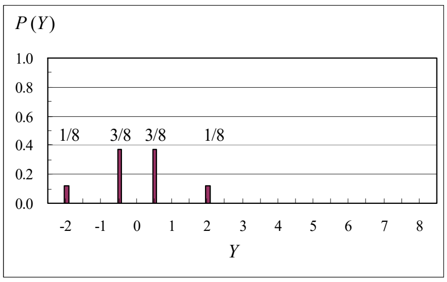

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Z' = Z/2$ | 0.25 | 2.125 | 4.00 |
| $P(Z') = P(Z/2)$ | 0.56 | 0.38 | 0.06 |

(2) $Z'$の平方根，すなわち $Z'' = \sqrt{Z'}$で与えられる $Z''$について考える．下表を埋めよ．例えば，$Z' = 0.25$ のとき，$Z'' = \sqrt{Z'} = \sqrt{}$0.25=0.5＿となる．その確率は，$Z'=0.25$ の確率と一致する．したがって，$P(Z''=$0.5$)=P(Z'=0.25)=$0.56＿となる．このようにして下表が埋められる．




| | | | |
|---|---|---|---|
| $Z'' = \sqrt{Z'}$ | 0.50 | 1.46 | 2.00 |
| $P(Z'') = P(\sqrt{Z'})$ | 0.56 | 0.38 | 0.06 |

(3) ここで，別の確率変数 $Y$ を導入する．ただし，別の確率変数といっても，今までの確率変数に対して独立しているだけで，その分布形状はまったく同じものである．




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | -2.00 | -0.50 | 0.50 | 2.00 |
| $P(Y)$ | 0.125 | 0.375 | 0.375 | 0.125 |

この $Y$ を $Z''$で除して（割って）定義される確率変数 $T$ について考える．これは 2 段階で考えなければならない．では，まず，第一段階として，$Y$，$Z''$それぞれの組み合わせによる結合事象を考えよう．例えば，$Y=-2.00$，$Z''=0.50$ のときには，$T = Y/Z'' = -2.00/0.50 = -4.00$ となる．その確率は，$Y=-2.00$，$Z''=0.50$ が互いに独立であることから乗法法則が成り立つので，$P(Y=-2.00) \times P(Z''=0.50) = 0.13 \times 0.50 \fallingdotseq 0.07$ となる．このようにして下表が埋められる．

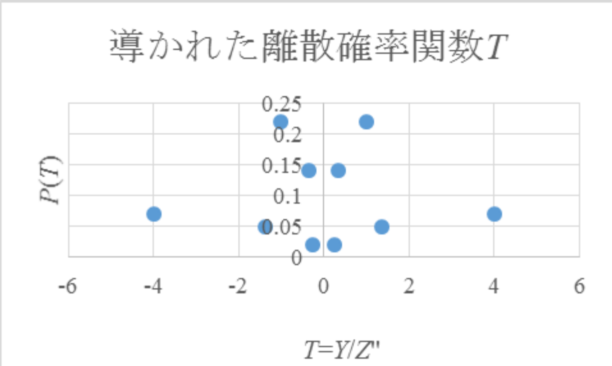
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Y | -2.00 | -0.50 | 0.50 | 2.00 |

年　　月　　日　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　学年＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

| $Z''$ $P(Z'')$ \ $P(Y)$ | 0.13 | 0.38 | 0.38 | 0.13 |
|---|---|---|---|---|
| 0.50 0.56 | $T=Y/Z''$ -4.00(=-2.00/0.50)<br>$P(T)=P(Y)\times P(Z'')$<br>0.07 (≒0.13×0.56) | -1.00<br>0.21 | 1.00<br>0.21 | 4.00<br>0.07 |
| 1.46 0.38 | -1.37<br>0.05 | -0.34<br>0.14 | 0.34<br>0.14 | 1.37<br>0.05 |
| 2.00 0.06 | -1.00<br>0.008 | -0.25<br>0.02 | 0.25<br>0.02 | 1.00<br>0.008 |

次は，第二段階である．上表のように，$T=Y/Z''$の値は，-4.00，-1.37，-1.00，-0.34，-0.25，0.25，0.34，1.00，1.37，4.00 の 10 種類である．今回は，-1.00 と 1.00 が，同じ値をとる結合事象を二つ持つ．したがって，各結合事象の確率をそのまま割り当てればよい．このようにして下表が埋められる．

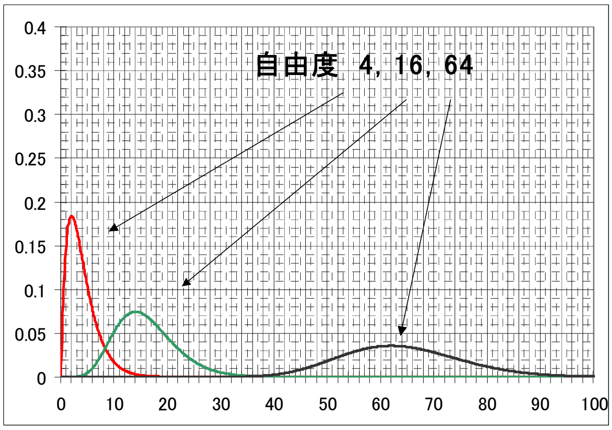
| $T=Y/Z''$ | -4.00 | -1.37 | -1.00 | -0.34 | -0.25 | 0.25 | 0.34 | 1.00 | 1.37 | 4.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(T)=P(Y)\times P(Z'')$ | 0.07 | 0.05 | 0.22 | 0.14 | 0.02 | 0.02 | 0.14 | 0.22 | 0.05 | 0.07 |

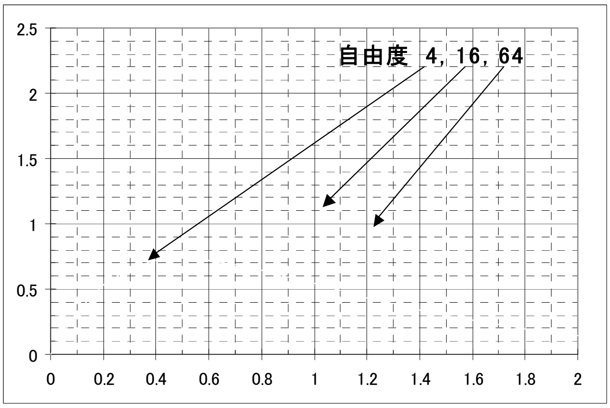


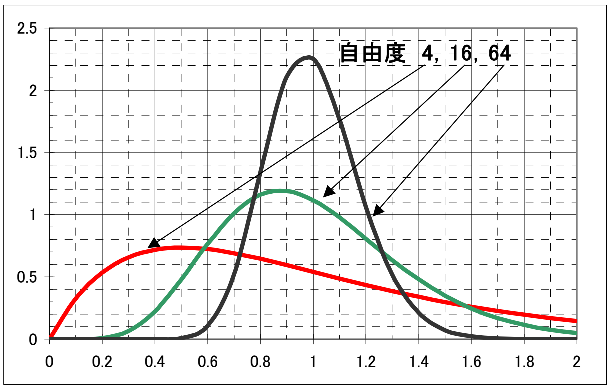

本問では，簡単な離散型確率関数を用いて，“複数の確率変数を組み合わせて生成される確率変数”，具体的には $T=\dfrac{Y}{\sqrt{\{(X_1)^2+(X_2)^2\}/2}}=Y/Z''=Y/\sqrt{Z'}=Y/\sqrt{Z/n}$ について考えた．$X_1$，$X_2$，$Y$ として，離散型確率関数の代わりに，標準正規分布 $N(0, 1)$を用いて，“複数の確率変数を組み合わせて生成される確率変数 $Y/\sqrt{Z/n}$　を定めたものが以下の $t$ 分布である．

問61　$X_1$，$X_2$，…，$X_n$ が標準正規分布 $N(0, 1)$に従うとして，$\sqrt{(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)/n}$について考えよう．

(1)　下図は自由度 $n$=4，16，64 のカイ 2 乗分布である．これを用いて，$Z'=(X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2)/4$，$(X_1^2+X_2^2+X_3^2+\cdots+X_{16}^2)/16$，$(X_1^2+X_2^2+X_3^2+\cdots+X_{64}^2)/64$ を図示せよ．横座標軸から立ち上がる地点，ピーク位置に特に注意せよ．幅が $1/n$ 倍になったときには，高さが $n$ 倍になることに注意せよ．



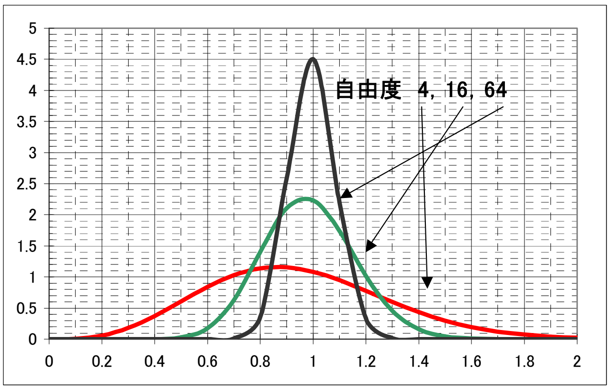




(2)　$Z''=\sqrt{Z'}=\sqrt{Z/n}$で与えられる $Z''$について考える．以前行ったように，平方根をとると，例えば 4 の平方根が 2 となるように，1 より大きい値の平方根は 1 に向かって【小さくなる，変わらない，大きくなる】．一方，0.25 の平方根が 0.5 となるように，1 より小さい値の平方根は 1 に向かって【小さくなる，変わらない，大きくなる】．したがって，1 より大きくても，1 より小さくても，平方根は 1 に【近づく，変わらない，離れる】性質がある．この性質から，$\sqrt{Z/n}$，　具体的には，$\sqrt{\{X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2\}/4}$，$\sqrt{\{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{16}^2\}/16}$，$\sqrt{\{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{64}^2\}/64}$ など，平方根で与えられる確率変数は，それぞれ $(X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2)/4$，$(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{16}^2)/16$，$(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{64}^2)/64$ に比べると，1 に向かって左右方向に【近づく，変わらない，離れる，縮む，広がる】ことが推測される．それぞれを求めたものが下図である．この図から，自由度，すなわち加算する標準正規分布の個数が増大するにつれ，1 に集中するようになることが見てとれる．十分に大きくなったときには，近似

年　　月　　日　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　学年＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

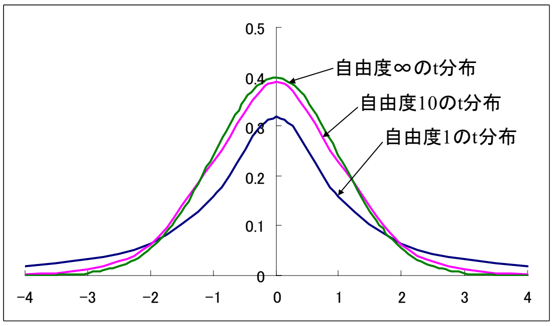
的には，$n$ が 30 以上になると，確定的な値，【1 以外，1】であると考えてもよい．

(3) $Y/Z'' = Y/\sqrt{Z'} = Y/\sqrt{Z/n}$について考える．$n$ が 30 以上になると，$\sqrt{Z/n}$は確定的な値，1 になると近似できるので，$Y/\sqrt{Z/n}$の分母$\sqrt{Z/n}$は【無視できず，無視でき】，$Y/\sqrt{Z/n}$は単なる標準正規分布 $Y$ になる．




**[要点48]スチューデントの $t$ 分布**(Student's $t$ distribution):標準正規分布 $N(0,1)$に従う $Y$ と自由度 $n$ (平均 $n$，分散 $2n$)のカイ 2 乗分布 $Z$ により定められる確率変数 $T = \dfrac{Y}{\sqrt{Z/n}}$ は自由度 $n$ の**スチューデントの $t$ 分布**(もしくは単に，**$t$ 分布**)に従う（下図参照)．

$\bar{n} = \infty$，すなわち自由度が無限大の分布は$T = \dfrac{Y}{\sqrt{Z/n}}$の分母が1と確定的になる．したがって．その分子$Y$，すなわち標準正規分布のみで与えられる．




問62　$t$ 分布は，標準正規分布 $N(0,1)$に【よく似ている，異なる】．特に，自由度が 30 以上になると，標準正規分布 $N(0,1)$に【等しい，異なる】として扱ってよい．

問63　自由度がそれぞれ 3,6,9 の $t$ 分布において，右端の面積が 0.05 となる $t$ 値を求めよ．なお，自由度 $n$, 右端の面積$\alpha$を与える $t$ 値を $t_{1-\alpha}{}^{n}$ と表す．巻末の付表（数値表）を参照して答えよ．

(1) $t_{1-0.05}{}^{1}$=＿＿6.314
(2) $t_{0.95}{}^{2}$=＿＿2.92
(3) $t_{0.99}{}^{10}$=＿＿2.764
(4) $t_{0.50}{}^{10}$=＿＿0
(5) $t_{0.01}{}^{10}$=＿＿-2.764

# II. 統計 (Statistics)

## 1. 標本理論

### 1.1 統計的推論

**[要点49]**母集団：全体の集団．標本：母集団の一部．
**統計的推論**：標本から得た結果に基づいて，母集団について，なんらかのことを推論するプロセス．

問64　大学生 15,000 人の中から 50 人を選び出し，彼らの身長を調べることで，15,000 人全員の身長について結論を導き出すことを考えよう．このとき，全ての学生 15,000 人のグループは，母集団は，＿全ての学生 15,000 人である．標本は，選び出された 50 人である．

### 1.2 不偏推定

**[要点50]統計量**：標本から計算される任意の量．**母数**：母集団の統計量．**不偏推定量**(unbiased estimator)：**統計量**の推定量の期待値が，**母数**（それに対応する母集団の統計量）と一致するとき，その推定量を**不偏推定量**と呼ぶ．その値はその母数の**不偏推定値**(unbiased estimate)となる．

> **公式**　平均の不偏推定値は**標本平均** $\bar{X}$．分散の不偏推定値は，**標本分散** $s^2$.
>
> $\bar{X}=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$
>
> $s^2=\{(x_1-\bar{X})^2+(x_2-\bar{X})^2+\cdots+(x_n-\bar{X})^2\}/(n-1)$
>
> 標本分散 $s^2$ は不偏分散ともいう

問65　ランダムに 10 個選び出したボールの直径[cm]が，14.0, 14.1, 14.1, 14.2, 14.1, 14.2, 14.0, 14.2, 14.1, 14.1 であったとして，

(3) 標本平均 $\bar{X}$を求めよ．

$\bar{X}$ =(14.0+14.1+14.1+14.2+14.1+14.2+14.0+14.2+14.1+14.1) /10 = 14.11[cm]

(4) 標本分散 $s^2$ を求めよ．

$s^2$ = {(14.0 − 14.11)$^2$+(14.1 − 14.11)$^2$+(14.1 − 14.11)$^2$+(14.2 − 14.11)$^2$+(14.1 − 14.11)$^2$+(14.2 − 14.11)$^2$+(14.0 − 14.11)$^2$+(14.2 − 14.11)$^2$+(14.1 − 14.11)$^2$+(14.1−14.11)$^2$} / (10−1) = 0.0054[m$^2$]

> **公式**
>
> $\bar{X} = (n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_N x_N) / (n_1 + n_2 + \cdots + n_N)$
>
> $s^2 = \{n_1(x_1-\bar{X})^2 + n_2(x_2-\bar{X})^2 + \cdots + n_N(x_N-\bar{X})^2\} / (n_1 + n_2 + \cdots + n_N - 1)$

問66　上問について，この公式を用いて，標本平均 $\bar{X}$, 標本分散 $s^2$ を求めよ．

$\bar{X}$ = (2･14.0+5･14.1+3･14.2) / (2+5+3) = 14.11[m]

年　　月　　日　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　学年＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$s^2 = \{2(14.0-14.11)^2+5(14.1-14.11)^2+3(14.2-14.11)^2\}/(2+5+3-1)$
$= 0.0054[\mathrm{m}^2]$

**[要点51]**平均の分散
標本内の各実現値 $x$ の分散を $\sigma_X{}^2$ とすると，$n$ 個の標本全ての実現値の平均$\bar{X}$の分散$\sigma_{\bar{X}}{}^2$は，$\sigma_{\bar{X}}{}^2 = \sigma_X{}^2 / n$.

問67　上問について，$\sigma_X{}^2$の推定量$s^2$から，$\bar{X}$の分散$\sigma_{\bar{X}}{}^2$の推定量 $s_{\bar{X}}{}^2$ を求めよ．

$s_{\bar{X}}{}^2 =$　$0.0054/10= 0.00054[\mathrm{m}^2]$

## 2. 区間推定

### 2.1 母平均の区間推定

#### 2.1.1　区間推定とは

**[要点52]**正規分布に基づく区間推定

標準偏差をσと表すと,
±σの範囲で生起する確率→68.27%
±2σの範囲で生起する確率→95.45%,
±3σの範囲で生起する確率→99.73%

つまり，

標本平均$\bar{X}$ が母平均μ±σの範囲で生起する確率 → 68.27%
μ±2σの範囲で生起する確率 → 95.45%,
μ±3σの範囲で生起する確率 → 99.73%

これは逆に，

母平均μ が標本平均$\bar{X}$±σの範囲で生起する確率 → 68.27%
$\bar{X}$±2σの範囲で生起する確率 → 95.45%,
$\bar{X}$±3σの範囲で生起する確率 → 99.73%

**[要点53]**範囲の最大値と最小値をそれぞれ，**上方信頼限界**，下方信頼限界，両者を総称して**信頼限界**(confidence limit)，範囲を**信頼区間**(confidence interval)という．ここで，その範囲内に収まっている確率が$\beta$%であるとき，**信頼係数**(confidence coefficient)$\beta$%信頼限界，信頼係数$\beta$%信頼区間という．通常は，$\beta$%を二分して，大きいほうの信頼限界以上の値となる確率が$\beta/2$%に，小さい方の信頼限界以下の値となる確率も$\beta/2$%になるように設定する．

問68　あるクラス 90 人の生徒に対して数学の試験を行った．生徒の試験の成績を $X$ と表す．その中から任意に抽出した A,B,C 君の成績が，3 点，6 点，9 点だった．講義で説明した計算方法を用いて，以下を求めよ．ただし，有効数字を 2 桁として計算せよ．例えば，1.7×4.5=7.65⇒7.7　1.7+0.14=1.84⇒1.8　のように計算すればよい．

(5) 標本　「A,B,C 君の（数学の試験）の成績」，あるいは「3 点，6 点，9 点」．

(6) 標本数　3

(7) 母集団クラス 90 人の（数学の試験）の成績

(8) $X$ の標本平均　$\bar{X}$ = (3+6+9　6

(9) $X$ の標本分散
$s^2=\{(3-6)^2+(6-6)^2+(9-6)^2\}/(3-1)=9$

(10)　$X$ の（標本）標準偏差（標本分散の平方根）
$s=\sqrt{9}=3$

(11)　標本平均の（標本）分散　$s_{\bar{X}}{}^2$ =9/3=3

(12)　$X$ の標本平均が正規分布に従うものと仮定し，母平均$\mu_X$の 95.45%信頼区間を求めよ．

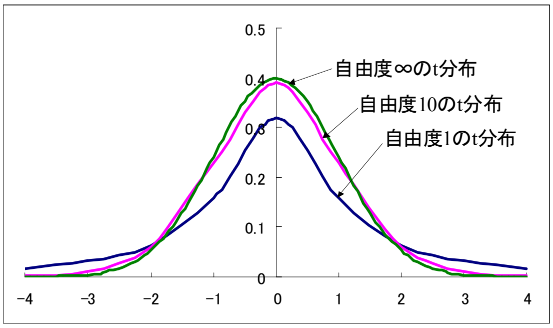
＿$\bar{X}$−＿2×$s_{\bar{X}}$ ≦$\mu_X$≦＿$\bar{X}$+＿2×$s_{\bar{X}}$　なので，
＿6−2×$\sqrt{3}$≦$\mu_X$≦＿6+2×$\sqrt{3}$，すなわち 2.6≦$\mu_X$≦ 9.4

余裕のある人のためのワンポイント追加講義 1

標本平均の分散を求めることについて
上記のようにして求められるのは，母集団の要素の個数が無限大であるような無限母集団である場合である．しかし，この問いでは，母集団の要素の個数が 90，すなわち有限であり，無限大ではない．したがって，そのような有限母集団について厳密に標本平均の分散を求める，教科書の 104 ページの脚注に示されている式を用いて，計算しなければならない．

#### 2.1.2　$t$ 分布の登場

問69　2.1.1 項で説明したように，平均の推定値$\bar{X}$と平均の推定値$\bar{X}$の標準偏差$\sigma_{\bar{X}}$ を用いれば，区間推定できる．しかし，標準化して考えれば統一的に扱える．そこで登場するのが t 分布である．すなわち，平均の分だけ差し引いてから，標本分散の平方根（標準偏差）で割ると，近似的には標準正規分布と見ることができるが，厳密には，平均が＿0 の＿$t$ 分布になる．その自由度は $n-1$ である．さらに，$n$≧3 のときには，標準偏差=$n/(n-2)$である．$n$ が十分に大きければ，標準偏差= $n/(n-2)$ ≒＿1 であり，標準正規分布と見なすことができるので．概ね＿−3 から＿3 の範囲でばらつくことがわかる．




問70　ある確率変数が $t$ 分布に従うものとする．{㋐，㋑，㋒} には，適切な用語を○で囲め．

(13)　自由度 2，信頼係数 95%に対応する $t$ 値
[正]　$t_{0.5+\beta/2}{}^{n} = t_{0.5+0.95/2}{}^{2} = t_{0.975}{}^{2} = 4.3$
[誤]　$t_{0.5+\beta/2}{}^{n-1} = t_{0.5+0.95/2}{}^{3-1} = t_{0.95}{}^{2} = 4.3$