3.2.3　１次元，正規直交基底関数の正規性と直交性

正規直交基底関数の正規性と直交性を確認しよう．ただし，計算は極めて複雑になってしまっている．三角関数を離散関数として扱っていることによる．

三角関数を連続関数（テキストの 3.2.9 節を参照されたい）として扱えば，簡単に証明できるので，自分で計算してみよう．

離散関数であれば，三角関数に対応する複素関数の内積，$< e^{j\frac{2\pi}{N}kx}$，$e^{j\frac{2\pi}{N}kx} >$であれば，比較的容易に証明できる．これはテキストの 3.4.3 節を参照されたい．

//

まず，周波数１の基底関数の例で考えてみよう．

//

その大きさの２乗は，

$$\left|\Psi_1(x)\right|^2 = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\left\{\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 1x\right\}^2$$

で表すことができる．いま，N=8 とすると大きさは，

$$\left|\Psi_1(x)\right|^2 = \frac{1}{8}\left[\left\{\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{8}\cdot 0\right\}^2 + \left\{\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{8}\cdot 1\right\}^2 + \cdots + \left\{\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{8}\cdot 7\right\}^2\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left\{\sqrt{2}\right\}^2 + \{1\}^2 + \{0\}^2 + \{-1\}^2 + \left\{-\sqrt{2}\right\}^2 + \{-1\}^2 + \{0\}^2 + \{1\}^2\right] = 1$$

となり，正規性を満たすことが確認できる．

では，次に，周波数１のコサイン基底関数と周波数２のコサイン基底関数の例で調べてみよう．

$$\left\langle \Psi_1(x), \Psi_2(x)\right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\left\{\left(\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 1x\right)\left(\sqrt{2}\ \cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2x\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\begin{array}{l}\left\{\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{8}\cdot 0\right\}\left\{\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{8}\cdot 0\right\} + \left\{\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{8}\cdot 1\right\}\left\{\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{8}\cdot 2\right\} + \\ \qquad\qquad \cdots + \left\{\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{8}\cdot 7\right\}\left\{\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{8}\cdot 14\right\}\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\sqrt{2}\bullet\sqrt{2} + 1\bullet 0 + 0\bullet(-\sqrt{2}) + (-1)\bullet 0 + (-\sqrt{2})\bullet\sqrt{2} + (-1)\bullet 0 + 0\bullet(-\sqrt{2}) + 1\bullet 0\right]$$

$$= 0$$

確かに，直交性が確認できる．

//

他の基底関数についても正規性と直交性を満たすことは以下のように確

認できる.

//

N は 2 のべき乗（具体例では，N=16=2^4，すなわちべき指数=4）とする．また，周波数 m, $n \neq 0$, $N/2$ とする（その他の場合には，例えば，周波数 m, n ＝0，$N/2$ の場合には，基底関数の係数が 1/2 倍になっていることに注意するなどして，同様に証明できる）．まず,

$$\left\langle \Psi_m(x), \Psi_n(x) \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\left\{\left(\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{N}\cdot mx\right)\left(\sqrt{2}\ \cos\frac{2\pi}{N}\cdot nx\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\left\{2\cos(\frac{2\pi}{N}\cdot mx)\cos(\frac{2\pi}{N}\cdot nx)\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x + \cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x\right\} \qquad \text{(A1)}$$

//

【m=n のとき】

$$\left\langle \Psi_m(x), \Psi_m(x) \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx + \cos\frac{2\pi}{N}\cdot(0)x\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right)+1\right\} = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right)\right\} + \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}1 \qquad \text{(A2)}$$

$$= 0 + \frac{1}{N}N \ = 1$$

ここで,「式(A2)の第一項のΣ」＝0 については以下のように導かれる.

$$\text{「式(A2)の第一項のΣ」} = \sum_{x=0}^{N-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\}$$

$$= \sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\} + \sum_{x=N/2}^{N-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\}$$

$$= \sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\} + \sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2m\left(x+\frac{N}{2}\right)\right\}$$

$$= \sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\} + \sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\left\{\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx + 2\pi m\right\}\right\}$$

$$= \sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\} + \sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\} \qquad (\because \cos(\theta + 2m\pi) = \cos\theta)$$

$$= 2\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\}$$

$$= 2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\} + 2\sum_{x=N/4}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\}$$

$$= 2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\} + 2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2m\left(x+\frac{N}{4}\right)\right\}$$

$$= 2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\} + 2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx + m\pi\right)\right\}$$

ここで，m が奇数（N=16 の具体例では，m =1,3,5,7）の場合には，$\cos(\theta+m\pi)=-\cos\theta$ ゆえに，この式の右辺は，

$$「式(A2)の第一項の\Sigma」= 2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\} - 2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\}$$

$$= 0$$

となる．

また，m が偶数の場合には，$\cos(\theta+m\pi)=\cos\theta$ ゆえに，

$$「式(A2)の第一項の\Sigma」= 2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\} + 2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx + m\pi\right)\right\}$$

$$= 2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\} + 2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\}$$

$$= 4\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\}$$

となる．ここで，m が $m=2l$（l は奇数）で表されるような偶数（N=16 の具体例では，m =2,6，つまり l =1,3）の場合には，さらに半分に分け，

$$「式(A2)の第一項の\Sigma」= 4\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\}$$

$$= 4\sum_{x=0}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\} + 4\sum_{x=N/8}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2mx\right\}$$

$$= 4\sum_{x=0}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\} + 4\sum_{x=0}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2l\left(x+\frac{N}{8}\right)\right\}$$

$$= 4\sum_{x=0}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\} + 4\sum_{x=0}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx + l\pi\right\}$$

$$= 4\sum_{x=0}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\} - 4\sum_{x=0}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\}$$

$$= 0$$

となる．一方，m が m=2l，l =2l'（l'は奇数）で表されるような偶数（N=16 の具体例では，m =4，つまり l =2，l'=1）の場合には，さらに半分に分け，

$$\text{「式(A2)の第一項の}\Sigma\text{」} = 4\sum_{x=0}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\} + 4\sum_{x=0}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx + l\pi\right\}$$

$$= 4\sum_{x=0}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\} + 4\sum_{x=0}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\}$$

$$= 8\sum_{x=0}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\}$$

$$= 8\sum_{x=0}^{N/16-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\} + 8\sum_{N/16}^{N/8-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\}$$

$$= 8\sum_{x=0}^{N/16-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\} + 8\sum_{x=0}^{N/16-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2l(x+N/16)\right\}$$

$$= 8\sum_{x=0}^{N/16-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\} + 8\sum_{x=0}^{N/16-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx + \frac{l\pi}{2}\right\}$$

$$= 8\sum_{x=0}^{N/16-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\} + 8\sum_{x=0}^{N/16-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx + \frac{2l'\pi}{2}\right\}$$

$$= 8\sum_{x=0}^{N/16-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\} + 8\sum_{x=0}^{N/16-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx + l'\pi\right\}$$

$$= 8\sum_{x=0}^{N/16-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\} - 8\sum_{x=0}^{N/16-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot 2lx\right\}$$

$$= 0$$

このような操作を繰り返すことにより，m=1,2,---,N/2-1 について，

m が偶数の場合には，$\cos m\pi = 1$ なので，「式(A2)の第一項のΣ」＝0 が導かれる．

//

【$m \neq n$ のとき】

まず、第一項について考える．

$$\text{「式(A1)の第一項の}\Sigma\text{」} = \sum_{x=0}^{N-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x\right\}$$

$$= \sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x\right\} + \sum_{x=N/2}^{N-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x\right\}$$

$$= \sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x\right\} + \sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)\left(x+\frac{N}{2}\right)\right\}$$

$$= \sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x\right\} + \sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\left\{\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x + (m+n)\pi\right\}\right\}$$

m+n が奇数（N=16 の具体例では，m+n=1,3,5,7,9,11,13,15）のとき，

$$「式(A1)の第一項の\Sigma」=\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x\right\}+\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\left\{\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x+(m+n)\pi\right\}\right\}$$

$$=\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x\right\}-\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x\right\}=0$$

m+n が m+n=2l（l は奇数）で表されるような偶数（N=16 の具体例では，m+n=2,6,10,14，つまり l =1,3,5,7）の場合には，半分に分け，

$$「式(A1)の第一項の\Sigma」==\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x\right\}+\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\left\{\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x+(m+n)\pi\right\}\right\}$$

$$=\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x\right\}+\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x\right\}$$

$$=2\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m+n)x\right\}$$

$$=2\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}$$

$$=2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}+2\sum_{N/4}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}$$

$$=2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}+2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2l\left(x+\frac{N}{4}\right)\right\}$$

$$=2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}+2\sum_{x=0}^{N/4-1}\cos\left\{\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx+l\pi\right\}$$

$$=2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}-2\sum_{x=0}^{N/4-1}\cos\left\{\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}$$

$$=0$$

以下，m+n が m+n =2l，l =2l'（l'は奇数）で表されるような偶数（N=16 の具体例では，m+n =4,12 つまり l =2,6, l'=1,3）の場合には，【m=n のとき】と同様に，さらに半分に分ける．以下省略.

次に、第二項について考える.

$$「式(A1)の第二項の\Sigma」=\sum_{x=0}^{N-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x\right\}$$

$$=\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x\right\}+\sum_{x=N/2}^{N-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x\right\}$$

$$=\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x\right\}+\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)\left(x+\frac{N}{2}\right)\right\}$$

$$=\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x\right\}+\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x+(m-n)\pi\right)\right\}$$

m-n が奇数（*N*=16 の具体例では，*m*+*n*=1,3,5,7,9,11,13,15）のとき，

$$「式(A1)の第二項の\Sigma」=\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x\right\}+\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x+(m-n)\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x\right\}-\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x\right\}$$

$$=0$$

m+*n* が *m*+*n*=2*l*（*l* は奇数）で表されるような偶数（*N*=16 の具体例では，*m*+*n*=2,6,10,14，つまり *l* =1,3,5,7）の場合には，半分に分け，

$$「式(A1)の第二項の\Sigma」=\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x\right\}+\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x\right\}$$

$$=2\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot(m-n)x\right\}$$

$$=2\sum_{x=0}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}$$

$$=2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}+2\sum_{N/4}^{N/2-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}$$

$$=2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}+2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2l\left(x+\frac{N}{4}\right)\right\}$$

$$=2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}+2\sum_{x=0}^{N/4-1}\cos\left\{\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx+l\pi\right\}$$

$$=2\sum_{x=0}^{N/4-1}\left\{\cos\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}-2\sum_{x=0}^{N/4-1}\cos\left\{\frac{2\pi}{N}\cdot 2lx\right\}$$

$$=0$$

一方，*m*+*n* が *m*+*n* =2*l*，*l* =2*l’*（*l’*は奇数）で表されるような偶数（*N*=16 の具体例では，*m* =4,12 つまり *l* =2,6，*l’*=1,3）の場合などについては，省略.