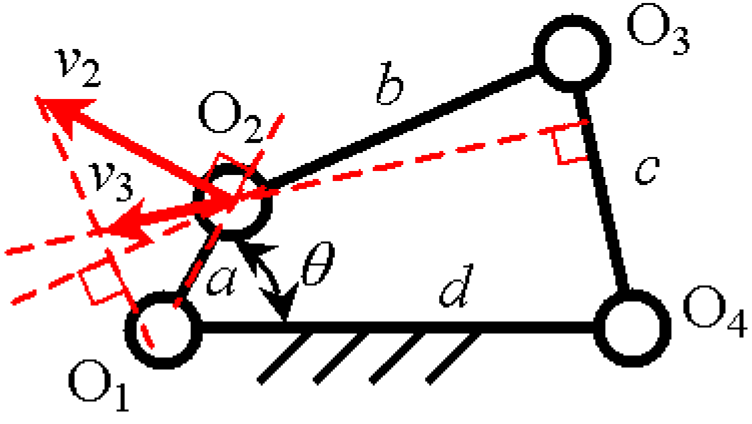
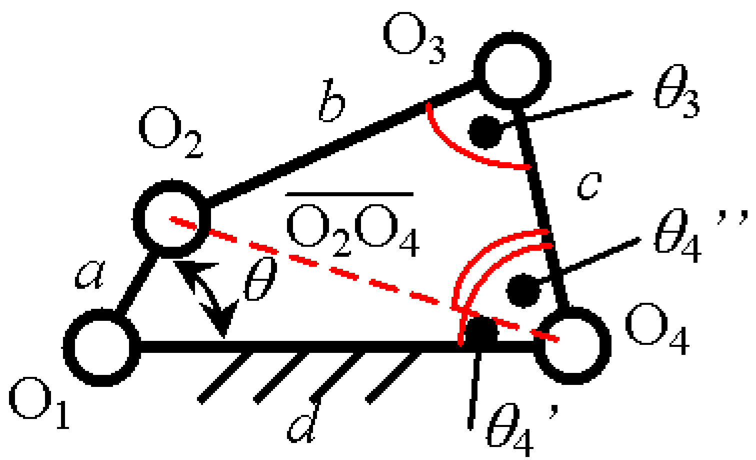
演習問題 1





まず，v2 を求める．

$$|\vec{v}_2| = a\omega_2 = 0.03\times 40 = 1.2\,\mathrm{m/s}$$

次に，各部の角度を求める．余弦定理より

$$\overline{O_2O_4}^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta$$
$$= 0.03^2 + 0.1^2 - 2\times 0.03\times 0.1\times\cos 60^\circ = 0.0079 \approx 0.08889^2$$

正弦定理より

$$\frac{\overline{O_2O_4}}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin\theta_4'}$$

$$\theta_4' = \sin^{-1}\left(\frac{a}{\overline{O_2O_4}}\sin\theta\right) = \sin^{-1}\left(\frac{0.03}{0.08889}\sin 60^\circ\right) \approx 16.99^\circ$$

余弦定理より

$$\cos\theta_3 = \frac{b^2 + c^2 - \overline{O_2O_4}^2}{2bc} = \frac{0.08^2 + 0.06^2 - 0.0079}{2\times 0.08\times 0.06} \approx 0.2188$$

$$\theta_3 = \cos^{-1} 0.2188 \approx 77.36^\circ$$

正弦定理より

$$\theta_4'' = \sin^{-1}\left(\frac{b}{\overline{O_2O_4}}\sin\theta_3\right) = \sin^{-1}\left(\frac{0.08}{0.08889}\sin 77.36^\circ\right) \approx 61.42^\circ$$

$$\theta_4 = \theta_4' + \theta_4'' = 16.99^\circ + 61.42^\circ = 78.41^\circ$$

θ，φ，ψ は，次のようになる．

$$\theta = 60^\circ$$

$$\varphi = 180 - (\theta_4 + \theta_3) = 180^\circ - (78.41^\circ + 77.36^\circ) = 24.23^\circ$$

$$\psi = 180^\circ - (\theta_4 + 90^\circ) = 180^\circ - (78.41^\circ + 90^\circ) = 11.59^\circ$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} |v_2|\sin\theta \\ |v_2|\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2\sin 60^\circ \\ 1.2\cos 60^\circ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.039 \\ 0.6 \end{bmatrix}\mathrm{m/s}$$

$$\vec{e}_b = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 24.23^\circ \\ -\sin 24.23^\circ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.9119 \\ -0.4104 \end{bmatrix}$$

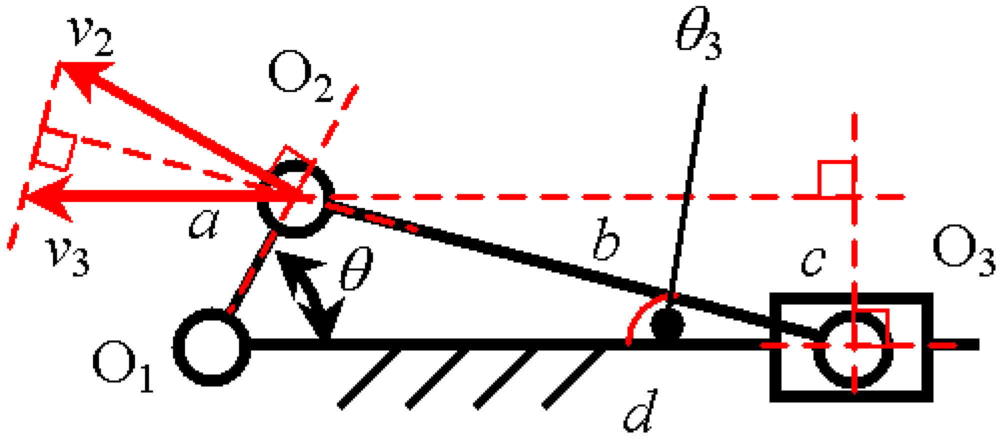
$$|\vec{v}_b| = \vec{v}_2 \cdot \vec{e}_b = \begin{bmatrix} 1.039 \\ 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9119 \\ -0.4104 \end{bmatrix} \approx 0.7012\text{m/s}$$

$$|\vec{v}_3| = \frac{|\vec{v}_b|}{\cos(\varphi-\psi)} = \frac{0.7012}{\cos(24.23^\circ - 11.59^\circ)} \approx 0.72\text{m/s}$$

また，$|\vec{v}_3| = c\omega_c$ より

$$\omega_c = |\vec{v}_3|/c = 0.72/0.06 = 12.0\text{rad/s}$$

演習問題 2



まず，v2 を求める．

$$300\text{rpm} = \frac{300 \times 2\pi}{60} \approx 31.42\text{rad/s}$$

$$|\vec{v}_2| = a\omega_a = 0.06 \times 31.42 = 1.885\text{m/s}$$

次に，θ と v3 の関係式を導出する．

$$\theta_3 = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\sin\theta\right) = \sin^{-1}\left(\frac{0.06}{0.3}\sin\theta\right) = \sin^{-1}(0.2\sin\theta)$$

$$\varphi = -\theta_3$$

$$\psi = 0^\circ$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} |\vec{v}_2|\sin\theta \\ |\vec{v}_2|\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.885\sin\theta \\ 1.885\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_b = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta_3) \\ -\sin(-\theta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{v}_b| = \vec{v}_2 \cdot \vec{e}_b = \begin{bmatrix} 1.885\sin\theta \\ 1.885\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \end{bmatrix} = 1.885\sin(\theta+\theta_3)$$

$$|\vec{v}_3| = \frac{|\vec{v}_b|}{\cos(\varphi-\psi)} = \frac{1.885\sin(\theta+\theta_3)}{\cos(-\theta_3-0^\circ)} = \frac{1.885\sin(\theta+\theta_3)}{\cos\theta_3}$$

これらの式を用いて v3 を求める．

(i) $\theta = 60^\circ$ のとき

$$\theta_3 = \sin^{-1}(0.2\sin\theta) = \sin^{-1}(0.2\sin 60^\circ) \approx 9.974^\circ$$

$$|\vec{v}_3| = \frac{1.885\sin(\theta+\theta_3)}{\cos\theta_3} = \frac{1.885\sin(60^\circ + 9.974^\circ)}{\cos 9.974^\circ} \approx 1.80\text{m/s}$$

(ii) $\theta = 90^\circ$ のとき

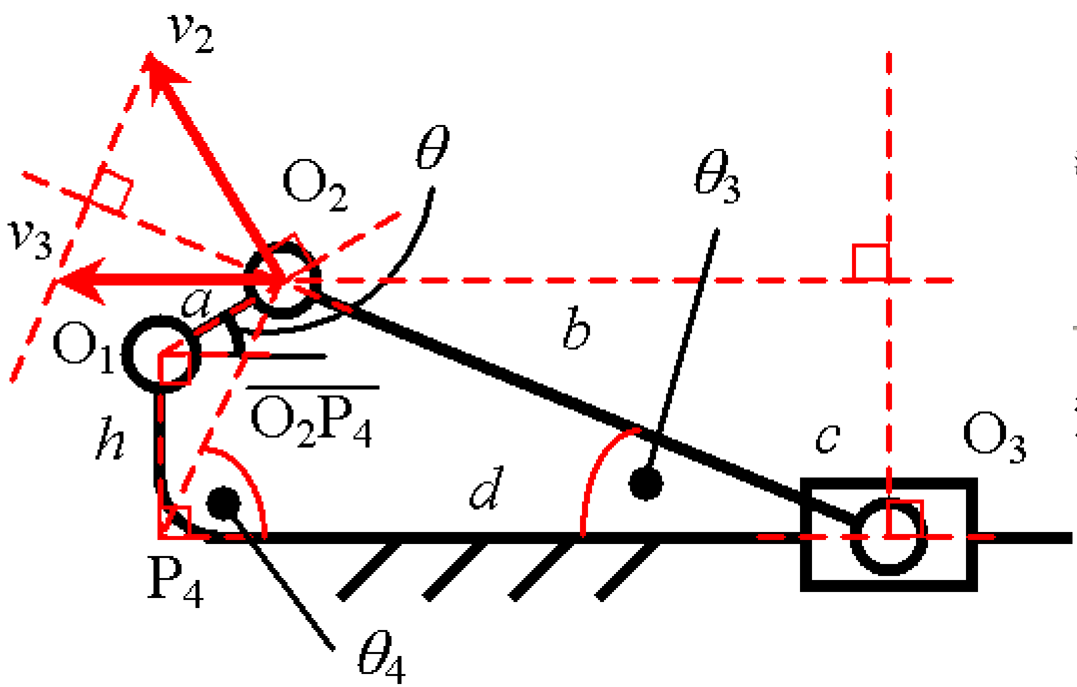
$$|\vec{v}_3| = |\vec{v}_2| = 1.88\text{m/s}$$

(iii) $\theta = 120^\circ$ のとき

$$\theta_3 = \sin^{-1}(0.2\sin\theta) = \sin^{-1}(0.2\sin 120^\circ) \approx 9.974^\circ$$

$$|\vec{v}_3| = \frac{1.885\sin(\theta+\theta_3)}{\cos\theta_3} = \frac{1.885\sin(120^\circ+9.974^\circ)}{\cos 9.974^\circ} \approx 1.47\text{m/s}$$

演習問題 3



まず，v2 を求める．

$$360\text{rpm} = \frac{360\times 2\pi}{60} \approx 37.70\text{rad/s}$$

$$|\vec{v}_2| = a\omega_a = 0.025\times 37.70 = 0.9425\text{m/s}$$

次に，各部の角度を求める．

$$\overline{\mathrm{O_2P_4}}^2 = a^2 + h^2 - 2ah\cos(\theta+90^\circ)$$
$$= 0.025^2 + 0.03^2 - 2\times 0.025\times 0.03\times\cos 120^\circ = 0.002275 \approx 0.$$

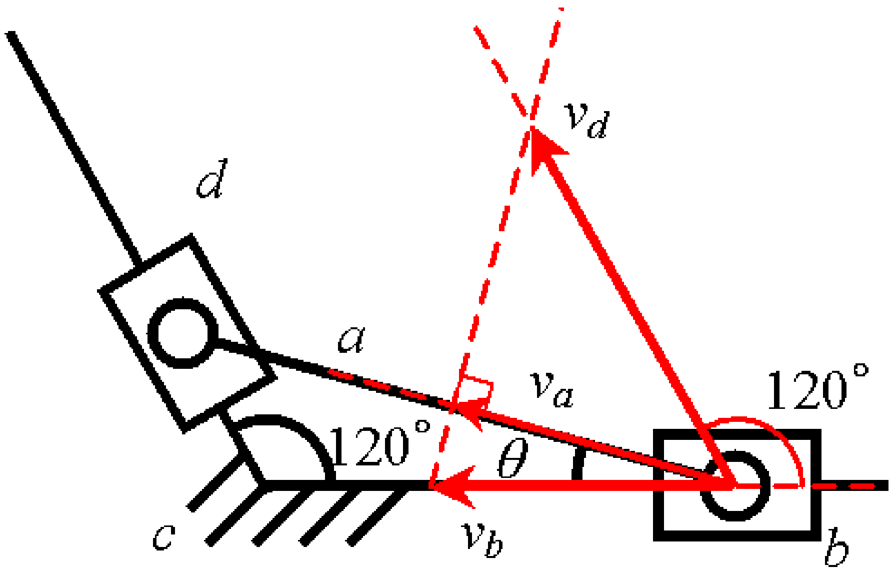
$$\theta_4 = 90^\circ - \sin^{-1}\left(\frac{a}{\overline{\mathrm{O_2P_4}}}\sin(\theta+90^\circ)\right) = 90^\circ - \sin^{-1}\left(\frac{0.025}{0.0477}\sin 120^\circ\right)$$

$$\theta_3 = \sin^{-1}\left(\frac{\overline{\mathrm{O_2P_4}}}{b}\sin\theta_4\right) = \sin^{-1}\left(\frac{0.0477}{0.12}\sin 63.01^\circ\right) \approx 20.74^\circ$$

演習問題 2 で求めた式を利用して v3 を求める．

$$|\vec{v}_3| = \frac{0.9425\sin(\theta+\theta_3)}{\cos\theta_3} = \frac{0.9425\sin(30^\circ+20.74^\circ)}{\cos 20.74^\circ} \approx 0.78\text{m/s}$$

演習問題 4

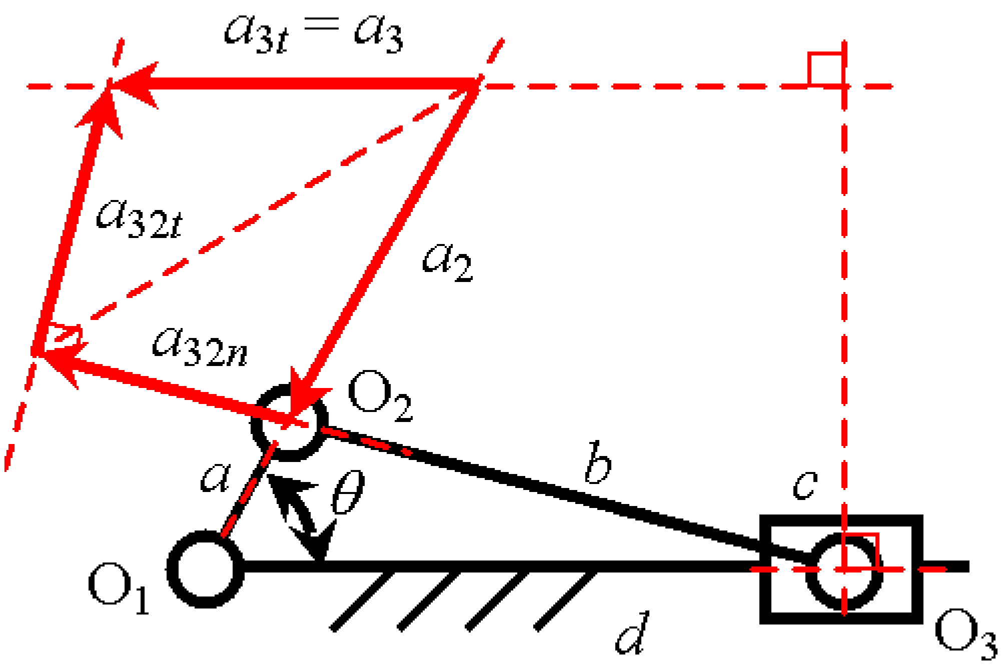


va を vb，vd からそれぞれ求められるから

$$|\vec{v}_b|\cos\theta = |\vec{v}_d|\cos(180^\circ-120^\circ-\theta)$$

$$|\vec{v}_d| = \frac{|\vec{v}_b|\cos\theta}{\cos(180^\circ-120^\circ-\theta)} = \frac{5\cos 15^\circ}{\cos(180^\circ-120^\circ-15^\circ)} \approx 6.8\text{m/s}$$

演習問題 5



まず，a_2 を求める．

$$|\vec{a}_2| = a\omega^2 = 0.06\times 31.42^2 \approx 59.22$$

次に，v_{32} から a_{32} を求める．

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} |\vec{v}_2|\sin\theta \\ |\vec{v}_2|\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.885\sin 60^\circ \\ 1.885\cos 60^\circ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.632 \\ 0.9425 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} |\vec{v}_3|\cos\psi \\ -|\vec{v}_3|\sin\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.80\cos 0^\circ \\ -1.80\sin 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.80 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{v}_{32}|^2 = (x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2 = (1.80-1.632)^2+(0-0.9425)^2 = 0.$$

$$|\vec{a}_{32n}| = \frac{|\vec{v}_{32}|^2}{b} = \frac{0.9165}{0.3} \approx 3.055$$

求めた a_2，a_{32} を足す．

$$\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} |\vec{a}_2|\cos\theta \\ -|\vec{a}_2|\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59.22\cos 60^\circ \\ -59.22\sin 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.61 \\ -51.29 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_{32n} = \begin{bmatrix} |\vec{a}_{32n}|\cos\theta 3 \\ |\vec{a}_{32n}|\sin\theta 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.055\cos 9.974^\circ \\ 3.055\sin 9.974^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.009 \\ 0.5291 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_2+\vec{a}_{32n} = \begin{bmatrix} 29.61 \\ -51.29 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.009 \\ 0.5291 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.62 \\ -50.76 \end{bmatrix}$$

a_{32t} の方向 e_{32t} は次のようになる．

$$\vec{e}_{32t} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_3 \\ \cos\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin 9.974^\circ \\ \cos 9.974^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1732 \\ 0.9849 \end{bmatrix}$$

a_2，a_{32}，$|a_{32t}|$，e_{32t} を用いて a_3 を求める．
a_3 は水平方向成分のみ，すなわち垂直方向成分は 0 だから，

$$\vec{a}_2+\vec{a}_{32n}-|\vec{a}_{32t}|\vec{e}_{32t} = \begin{bmatrix} 32.62 \\ -50.76 \end{bmatrix} + |\vec{a}_{32t}|\begin{bmatrix} -0.1732 \\ 0.9849 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\vec{a}_3| \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{a}_3$$

$$-50.8+|\vec{a}_{32t}|\times 0.985 = 0$$

垂直方向成分の関係式から $|a_{32t}|$ を求める．

$$|\vec{a}_{32t}| - 50.76/0.9849 - 51.54$$

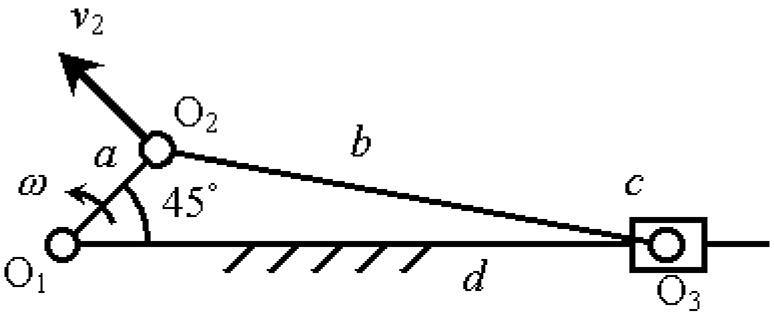
$|a_{32t}|$ を用いて a_3 を求めると

$$|\vec{a}_3| = 32.62+|\vec{a}_{32t}|\times(-0.1732) = 32.62+51.54\times(-0.1732) \approx 23.7\text{m/s}^2$$

機械運動学第 3 章 --- 例題 3.2 詳解

- 物理量(長さ，速度，加速度など)を表す記号は普通，斜体(イタリック)で表します．リンクの「a」と加速度の「*a*」に注意して下さい．
- プログラムの都合により，ベクトル記号「→」がつけられません．ベクトルの計算となる部分については，その旨記入しました．

【例題 3.2】　下図の機構において，リンク a，b の長さをそれぞれ 100mm，400mm とする． a が一定の回転数 300rpm で回転しているとき，$\angle O_2O_1O_3 = 45°$ の瞬間における c の加速度を求めよ．



(解)

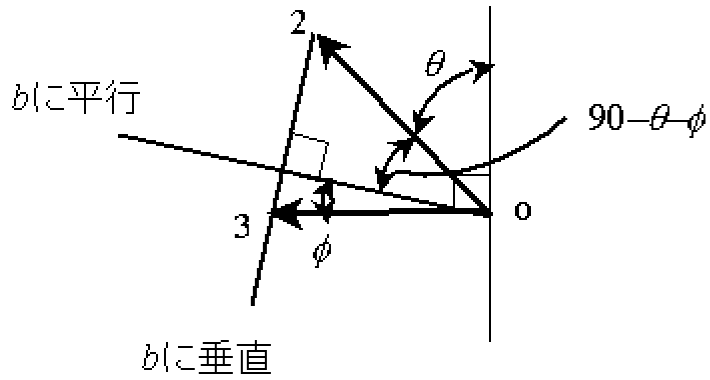
式(3.8)により a の角速度を求めると

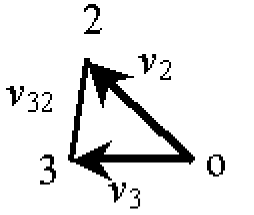
$\omega = 2\pi \times 300 / 60 = 31.4 \mathrm{rad/s}$

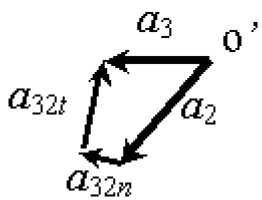
である．したがって

$v_2 = 31.4 \times 100 = 3140 \mathrm{mm/s} = 3.14 \mathrm{m/s}$

【作図だけで求める方法】







与えられた寸法の割合で図形を描く．すなわち，速度に対する単位寸法を決め，O から v_2 の速度 3.14m/s に相当する大きさのベクトルをリンク a に直角に描く．つまり，任意の点 o より v_2 に等しく o-2 をとる． v_3 の方向はリンク d に沿っているから， o を通り d に平行な直線を引く．さらに，リンク d に沿う方向の分速度が一定であることに基づいて，2 を通り b に垂直な線を引き，前者との交点を 3 とすれば o-3 は v_3 を表す． v_3 のベクトルの長さを v_2 を描いたときに決めた寸法単位で測れば

$v_3 \approx 2.62 \mathrm{m/s}$

となる．さらに，2-3 は v_{32} を表すので，

$v_{32} \approx 2.26 \mathrm{m/s}$

となる．リンク a は一定の回転数で回転しているので，その角加速度は 0 であり， O_2 の加速度は a に沿う加速度だけであって，その大きさは

$a_2 = a_{2n} = 0.1×31.4^2 = 98.6$ m / s²

である．また a_{32n} は次のように求められる．

$a_{32n} = v_{32}^2 / b = 2.26^2 / 0.4 = 12.8$ m / s²

さて，

$a_3 = a_2 + a_{32} = a_2 + a_{32n} + a_{32t}$ (ベクトル記号「→」がついてませんが、ベクトルの足し算です)

において ,O_3 は直線運動をするのでその方向はリンク d に沿っている．a_2 はリンク a に沿う成分だけであり , a_{32n} はリンク b に沿いその大きさは求めてある． a_{32t} は b に垂直であるが大きさはわかっていない．そこで o からリンク a に平行に a_2 の大きさのベクトル a_2 をとり，その先端から a_{32n} の大きさのベクトル a_{32n} を b に平行に引く .この先端を通って b に垂直に引いた線と o を通り d に平行に引いた線との交点を求めれば ベクトル a_3 が求められる．これを測れば

$a_3 = 70.2$m / s²

になる．

【三角形の公式を用いて，数式で表す解法】

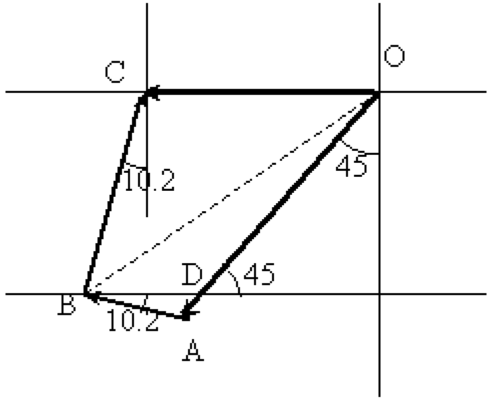
はじめに，1.3 節の式(1.8)により，

$\varphi = \arcsin((a \bullet \sin\theta)/b) = \arcsin((100 \sin 45°)/400) ≈ 10.2°$

を求める．次に，上図の角度の関係を考え，次のように v_3 を得る．

$v_3 = v_2 \cos(90°-\theta-\varphi) / \cos\varphi = v_2 \sin(\theta+\varphi) / \cos\varphi$

$≈3.14 \sin(45°+10.2°) / \cos 10.2° ≈ 2.62$ m/s



ここで，以下のように角度を求める．

$\angle AOE = \angle O_2O_1O_3 = 45°$

$\angle ABD = \angle O_2O_3O_1 = \arcsin(100 \sin(45°) / 400) ≈ 10.2°$

$\angle BAO = 180°-\angle ABD-\angle ADB ≈ 180°-10.2°-45° = 124.8°$

次に，余弦定理を適用して，

$BO = \sqrt{AO^2+AB^2-2×AO×AB \cos\angle BAO}$

$≈ \sqrt{98.6^2+12.8^2-2×98.6×12.8 \cos(124.8°)}$

$≈ 106.4$

さらに，正弦定理

$AO / \sin\angle ABO = BO / \sin\angle BAO$

から，

$\angle ABO = \arcsin(\sin\angle BAO×AO / BO)$

$≈ \arcsin(\sin(124.8°)×98.6 / 106.4)$

$≈ 49.5°$

これから，

$\angle CBO = 90°-\angle ABO ≈ 90°-49.5° = 40.5°$

$\angle BCO = 90°+\angle BCF ≈ 10.2°+90° = 100.2°$

同様に，正弦定理

BO / sin∠BCO = CO / sin∠CBO

から，

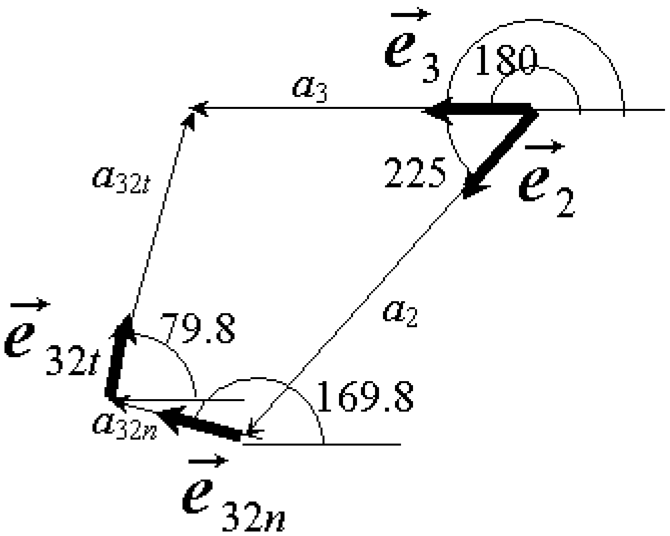
CO = a_3 = BO sin∠CBO / sin∠BCO

≈ 106.4 sin40.5° / sin100.2°

≈ 70.2m / s²

になる．

【ベクトル解法】



a_2 + a_{32n} + a_{32t} = a_3 (ベクトルの足し算)より

98.6•e_2 + 12.8•e_{32n} + k_1•e_{32t} = k_2•e_3 (e はベクトル)

これに，

$$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos 225^\circ \\ \sin 225^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.707 \\ -0.707 \end{bmatrix},\ \vec{e}_{32n} = \begin{bmatrix} \cos 169.8^\circ \\ \sin 169.8^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.984 \\ 0.177 \end{bmatrix},$$

$$\vec{e}_{32t} = \begin{bmatrix} \cos 79.8^\circ \\ \sin 79.8^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.177 \\ 0.984 \end{bmatrix},\ \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ \\ \sin 180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を代入して 2 元 1 次連立方程式

-67.5 + 0.984 k_1 = 0

-82.3 + 0.177 k_1 = -k_2

が得られる．これを解いて，

k_1 = 68.5

k_2 = -70.2

a_3 = |k_2| = 70.2m / s²

を得る．