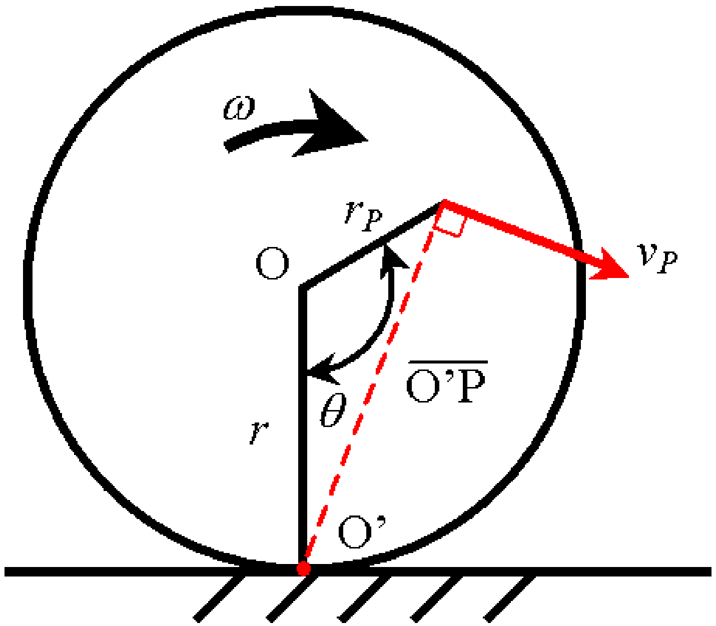
演習問題 1



瞬間中心 O'から点 P までの距離は

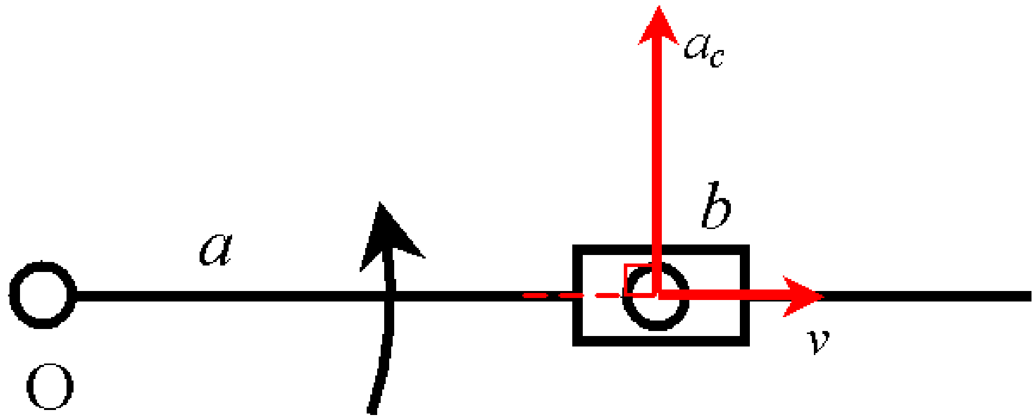
$$\overline{O'P}^2 = r^2 + r_P^2 - 2rr_P\cos\theta$$

$$= 0.1^2 - 0.06^2 - 2\times0.1\times0.06\times\cos120^\circ = 0.0196 = 0.14^2$$

よって，v_p は

$$|\vec{v}_P| = \overline{O'P}\omega = 0.14\times10 = 1.4\,\mathrm{m/s}$$

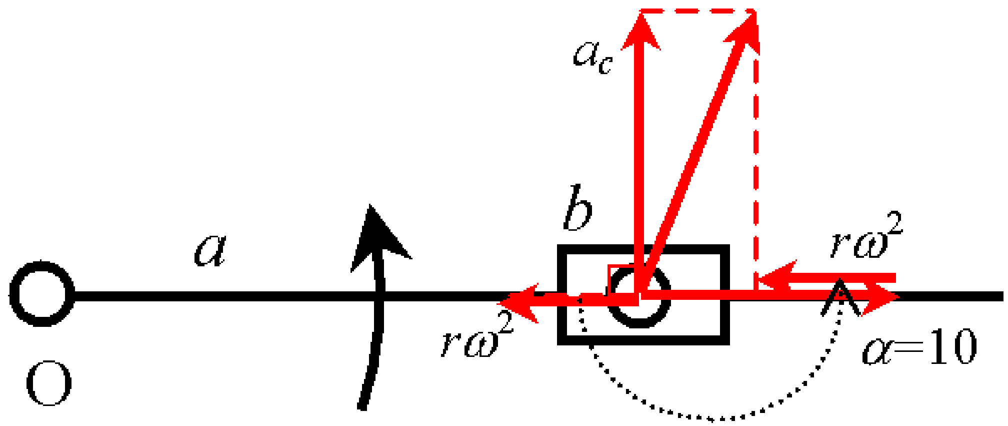
演習問題 2



(3-3-2 節を参考に)

$$a_c = 2v\omega = 2\times3\times5 = 30\,\mathrm{m/s^2}$$

演習問題 3



(ベクトルの向きに注意して)

$$a_b = \sqrt{a_c^2 + (\alpha - r\omega^2)^2} = \sqrt{30^2 + (10 - 0.2\times5^2)^2} \approx 30.4$$

演習問題 4

半径方向外向きに速度 v で運動する質点について，半径方向の加速度を考えよう．微小時間 dt の間に s は $d\theta$ 回転して s' の位置に来て，その間に P は s に沿って vdt 進んで P' の位置に来たとする．このとき，P'における垂直方向(s 方向)がたまたま水平方向となっている）の分ベクトルの大きさ v_{t+dt}，および P における垂直方向の分ベクトルの大きさ v_t は，上向きを正とすると，

$$
\begin{aligned}
v_{t+dt} &= -\omega \mathrm{OP'} \sin d\theta + v\cos d\theta \\
&= -\omega(\mathrm{OP} + vdt)\sin d\theta + v\cos d\theta \\
&= -\omega(\mathrm{OP} + vdt)\, d\theta + v \\
&= -\omega(\mathrm{OP} + vdt)\ \omega\, dt + v \\
&= -\omega^2\ \mathrm{OP}\ dt - \omega\, v\, dt^2 + v \\
&= -\omega^2\ \mathrm{OP}\ dt \qquad + v \qquad \ldots(\mathrm{E3.9.1})
\end{aligned}
$$

ただし，$\cos d\theta \approx 1$, $\sin d\theta \approx d\theta = \omega\, dt$, dt^2 は微小な時間 dt の 2 乗なので無視．

$$v_t = v \qquad \ldots(\mathrm{E3.9.2})$$

したがって，垂直方向(s 方向)の速度の変化を dv_t とすれば，

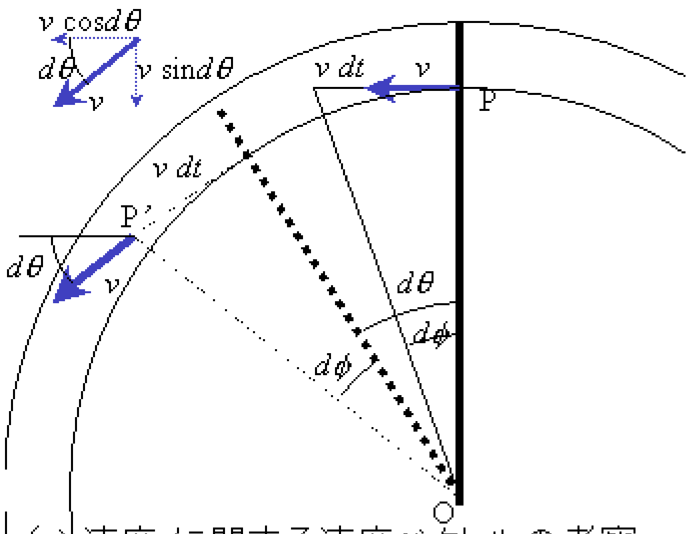
$$
\begin{aligned}
dv_t &= v_{t+dt} - v_t \\
&= -\omega^2 \mathrm{OP}\ dt\ +\ v - v \\
&= -\omega^2 \mathrm{OP}\ dt
\end{aligned}
$$

となり，これによる加速度を a_C とすれば，

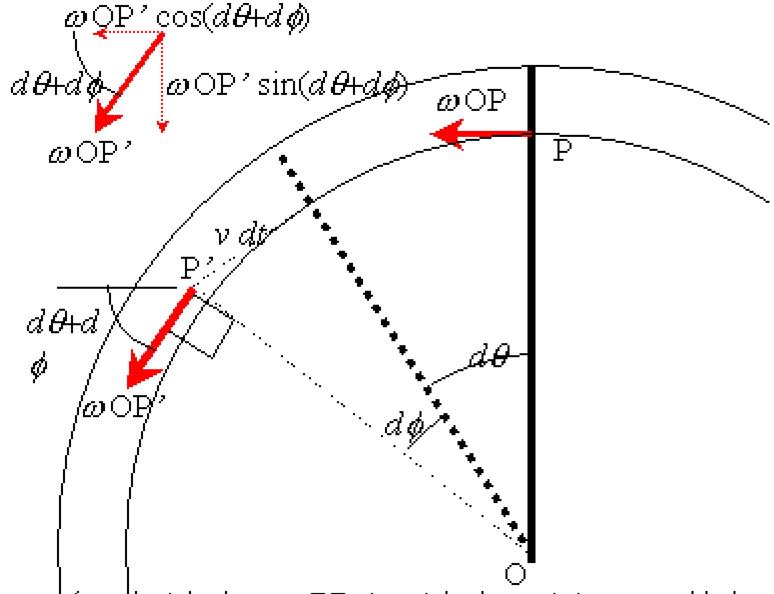
$$a_C = dv_t\,/\,dt = -\omega^2 \mathrm{OP} \qquad \ldots(\mathrm{E3.9.3})$$

となる．-なので，下向き，つまり中心向きである．なお，v には無関係，すなわち，半径方向外向きに速度 v で運動していても，その速度は半径方向の加速度には影響を及ぼさないことに注意せよ．

演習問題 5



(a) 速度vに関する速度ベクトルの考察



(b) 角速度ωに関する速度ベクトルの考察

並進運動の速度 v に関する速度の変化と，回転運動の角速度 ω に関する速度の変化に分けて考え，最後に両者を重ね合わせる．

【並進運動の速度 v に関して】

まず，並進運動の速度 v に関する速度の変化について考える．まず，円盤の上で考えよう．円盤が回転していないと思えばよい．このとき，ある質点が，初期時刻 t に点 P にいるものとすれば，次の時刻 $t+dt$ には，左向きに vdt の地点に移動する．ところで，この間，円盤は $d\theta$，つまり ωdt だけ反時計回りに回転している．その様子は，図(a)においては，回転前が太実線で，回転後が太点線で示されている．したがって，絶対座標系上でこの質点 P の運動を見ると，点 P'に移動することになる．この時には，円盤が $d\theta$ 回転していることから，速度ベクトル v の方向も $d\theta$ 回転している．このような状況をふまえ，速度 v に関する速度の変化を定式化する．

- 横方向

時刻 t において，並進速度 v に関する，横方向の速度を $v_{並進,横}(t)$ と表すと，

$$v_{並進,横}(t) = v \qquad \ldots(\text{E}3.10.1)$$

$$v_{並進,横}(t+dt) = v\cos d\theta = v \qquad \ldots(\text{E}3.10.2)$$

したがって，並進速度 v に関する，横方向の速度変化は，

$$\underline{dv_{並進,横} = v_{並進,横}(t+dt) - v_{並進,横}(t) = 0} \qquad \ldots(\text{E}3.10.3)$$

- 縦方向

また，時刻 t において，並進速度 v に関する，縦方向の速度を $v_{並進,縦}(t)$ と表すと，

$$v_{並進,縦}(t) = 0 \qquad \ldots(\text{E}3.10.4)$$

$$v_{並進,縦}(t+dt) = v\sin d\theta = v\,d\theta = \omega v\,dt \qquad \ldots(\text{E}3.10.5)$$

したがって，並進速度 v に関する，縦方向の速度変化は，

$$\underline{dv_{並進,縦} = v_{並進,縦}(t+dt) - v_{並進,縦}(t) = \omega v\,dt} \qquad \ldots(\text{E}3.10.6)$$

【回転運動の角速度 ω に関して】

- 準備

次の準備のため，OP'を求めておく．

$$\text{OP}' = \sqrt{(\text{OP}^2 + (v\,dt)^2)} = \text{OP} \qquad \ldots(\text{E}3.10.7)$$

ここで，$(v\,dt)^2$ は微小量の 2 乗の項であることから OP^2 に比べて無視できることに注意せよ．

また，v による移動量 $v\,dt$ を換算した角度 $d\varphi$ も求めておく．$v\,dt$ が微小であることを考慮すると，

$$d\varphi = \arctan(v\,dt / \text{OP}) = v\,dt / \text{OP} \qquad \ldots(\text{E}3.10.8)$$

- 横方向

さて，回転運動の角速度 ω に関する速度の変化について考える．まず，質点は，初期時刻 t には点 P にいたが，次の時刻 $t+dt$ には点 P'に移動していた．何れの時刻においても，回転運動に起因する速度は接線方向を向き，その大きさは半径と角速度の積である．したがって，時刻 t における，角速度 ω に関する，横方向の速度を $v_{回転,横}(t)$ と表すと，（OP'には，式 E3.10.7 を代入する）

$$v_{回転,横}(t) = \omega\text{OP} \qquad \ldots(\text{E}3.10.9)$$

$$v_{回転,横}(t+dt) = \omega\text{OP}'\cos(d\theta + d\varphi) = \omega\,\text{OP} \qquad \ldots(\text{E}3.10.10)$$

したがって，角速度 ω に関する，横方向の速度変化は，

$$\underline{dv_{回転,横} = v_{回転,横}(t+dt) - v_{回転,横}(t) = 0} \qquad \ldots(\text{E}3.10.11)$$

- 縦方向

また，時刻 t における，角速度 ω に関する，縦方向の速度を $v_{回転,縦}(t)$ と表すと，（OP'，$d\varphi$ には，式 E3.10.7，式 E3.10.8 を代入する）

$$v_{回転,縦}(t) = 0 \qquad \ldots(\text{E}3.10.12)$$

$$v_{回転,縦}(t+dt) = \omega\,\text{OP}'\sin(d\theta + d\varphi) = \omega\text{OP}\,(d\theta + d\varphi)$$

$$= \omega\text{OP}\,(\omega dt + v\,dt / \text{OP}) = \omega^2\,\text{OP}dt + v\omega\,dt \qquad \ldots(\text{E}3.10.13)$$

したがって，角速度 ω に関する，縦方向の速度変化は，

$$\underline{dv_{回転,縦} = v_{回転,縦}(t+dt) - v_{回転,縦}(t) = \omega^2\text{OP}\,dt + v\,\omega\,dt} \qquad \ldots(\text{E}3.10.14)$$

【まとめ】

ここで，並進運動の速度 v に関する速度の変化と，回転運動の角速度 ω に関する速度の変化を重ね合わせる．

$$\underline{dv_{横} = dv_{並進,横} + dv_{回転,横} = 0 + 0 = 0} \qquad \ldots(\text{E}3.10.15)$$

$$\underline{dv_{縦} = dv_{並進,縦} + dv_{回転,縦} = \omega v\,dt + \omega\,\text{OP}^2 dt + v\omega\,dt}$$

$$\underline{= \omega^2\,\text{OP}\,dt + 2v\omega\,dt} \qquad \ldots(\text{E}3.10.16)$$

以上により，横方向の加速度，縦方向の加速度は，

$$a_{横} = dv_{横} / dt = 0 \qquad \ldots(\text{E}3.10.17)$$

$$a_{縦} = dv_{縦} / dt = \omega^2\,\text{OP} + 2v\omega \qquad \ldots(\text{E}3.10.18)$$

このように，横方向には加速度は発生しない．縦方向には角速度 ω に起因する求心加速度 $\omega^2\text{OP}$ に加えて，並進速度 v に起因するコリオリの加速度 $2v\omega$（v に垂直な方向である）が付け加わっていることに注意せよ．